Énoncé

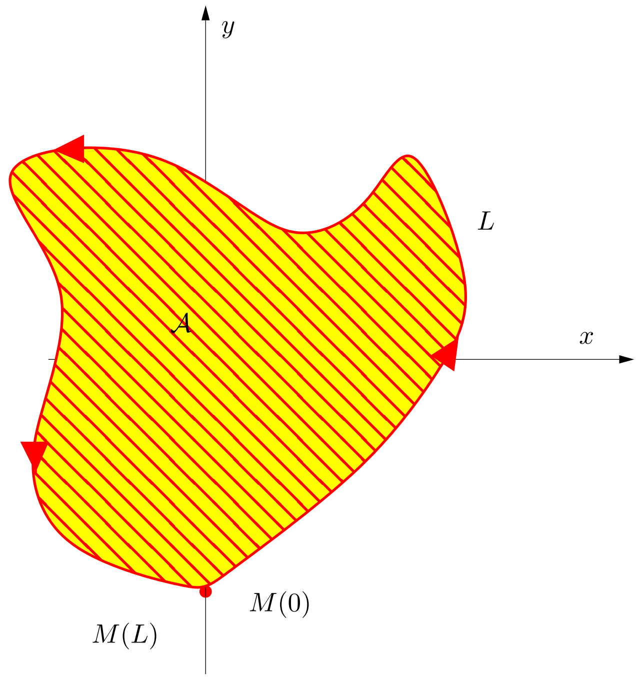

FIG. 1: Inégalité isopérimétrique $\mathcal{A} \leq \dfrac{L^2}{4\pi}$

Question préliminaire

Soit ψ une fonction continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
Montrer que, pour tous les réels a, les intégrales

$$\int_a^{a+2\pi} \psi(t)dt$$

sont égales.
On définit le nombre *valeur moyenne* de ψ (noté $\overline{\psi}$) par :

$$\overline{\psi} = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} \psi(t)dt$$

pour un a quelconque.
L'objet de ce problème est de démontrer *l'inégalité de Wirtinger*.

$$\int_0^{2\pi} (f(t) - \overline{f})^2 dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$$

pour *certaines* fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et 2π-périodique.
L'inégalité de Wirtinger permet de démontrer l'inégalité isopérimétrique.

Partie I.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Soit a et b deux réels tels que

$$a < b \leq a + \pi \qquad\qquad f(a) = f(b) = 0$$

Soit φ la fonction définie dans $]a, b[$ par :

$$\forall t \in]a, b[: \varphi(t) = f(t) \operatorname{cotan}(t - a)$$

1. Montrer que l'on peut toujours prolonger φ par continuité en une fonction définie dans $[a, b]$. Préciser, suivant les cas, les valeurs de $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
   Dans toute la suite, φ désignera la fonction continue prolongée dans $[a, b]$. Il est clair que φ est dérivable et à dérivée continue dans l'ouvert. En revanche, la question de la dérivabilité en a et b n'est pas abordée.
2. Soit u et v deux réels tels que $a < u < v < b$.
   Montrer que l'accroissement de $f\varphi$ entre u et v est égal à
   $$\int_u^v f'^2(t)dt - \int_u^v f^2(t)dt - \int_u^v \left(\varphi(t) - f'(t)\right)^2 dt$$
   La relation
   $$0 = \int_a^b f'^2(t)dt - \int_a^b f^2(t)dt - \int_a^b \left(\varphi(t) - f'(t)\right)^2 dt$$
   est-elle valide ?
3. Montrer que
   $$\int_a^b f^2(t)dt \leq \int_a^b f'^2(t)dt$$
4. On suppose que l'inégalité du 3. est une égalité.
   a. Montrer que $f'(t) = \varphi(t)$ pour tous les $t \in [a, b]$.
   b. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(t) = \lambda \sin(t - a)$ pour tous les t dans $[a, b]$.

Rémy Nicolai Awirti

Partie II.

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que la distance entre deux zéros consécutifs de f soit inférieure ou égale à π. Montrer que

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq \int_a^b f'^2(t)dt$$

lorsque a et b sont deux zéros de f vérifiant $a < b$.

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda > 0$, on définit f_λ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : f_\lambda(t) = f(\frac{t}{\lambda})$$

   a. Exprimer $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f_\lambda^2(t)dt$ et $\int_{\lambda a}^{\lambda b} {f_\lambda}'^2(t)dt$ en fonction de $\int_a^b f^2(t)dt$ et $\int_a^b f'^2(t)dt$.

   b. Montrer que la proposition suivante est fausse.
   Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ prenant la valeur 0 en a et b, on a :

$$\int_a^b f^2(t)dt \leq \int_a^b f'^2(t)dt$$

Partie III.

Soit n un entier naturel non nul fixé. On définit dans $\mathbb{R}$ les fonctions $c_0, c_1, \cdots, c_n$ et $s_1, \cdots, s_n$ par :

$$\begin{array}{llll} c_0(t) = 1, & c_1(t) = \cos(t), & \cdots & c_n(t) = \cos(nt) \\ & s_1(t) = \sin(t), & \cdots & s_n(t) = \sin(nt) \end{array}$$

1. Pour $i \in \{0, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, calculer $\int_0^{2\pi} c_i(t)c_j(t)dt$, $\int_0^{2\pi} c_i(t)s_j(t)dt$, $\int_0^{2\pi} s_i(t)s_j(t)dt$ en séparant bien les divers cas.

2. Soit $\mathcal{T} = \text{Vect}(c_0, \cdots, c_n, s_1, \cdots, s_n)$ et $f \in \mathcal{T}$. Que vaut $\overline{f}$? Démontrer

$$\int_0^{2\pi} (f(t) - \overline{f})^2 dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$$

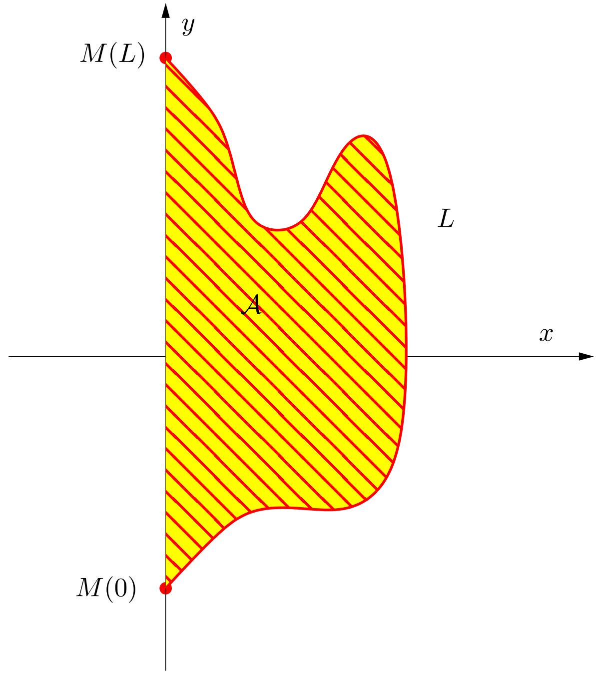

FIG. 2: Inégalité $\mathcal{A} \leq \dfrac{L^2}{2\pi}$

Partie IV. Inégalité isopérimétrique

Dans cette partie[1], on pourra utiliser (pour tous réels u et w)

$$uw \leq \frac{1}{2}(u^2 + w^2)$$

On pourra aussi utiliser des changements de paramètres très simples.

1. Démontrer l'inégalité indiquée au dessus.

2. Ici M est une courbe paramétrée normale de classe $\mathcal{C}^1([0, L])$ à valeurs dans un plan. La courbe est donc de longueur L. Un repère est fixé, les fonctions coordonnées sont notées x et y. On pose $U = x \circ M$ et $V = y \circ M$. Ce sont des fonctions de classe

[1] d'après http ://www.math.utah.edu/ treiberg/isoperim/isop.pdf

$\mathcal{C}^1([0,L])$ à valeurs réelles. On suppose (voir Fig. 2)

$$U(0) = U(L) = 0$$

On note $\mathcal{A}$ l'aire définie par le support de la courbe et l'axe des y. Montrer que

$$\mathcal{A} \leq \frac{L^2}{2\pi}$$

Étudier le cas d'égalité.

3. Ici M est une courbe paramétrée normale, définie dans $\mathbb{R}$, périodique de plus petite période L (voir Fig. 1). La longueur du support est donc L. Les fonctions U et V sont définies comme au dessus. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la portion de plan délimité par la courbe. On suppose que l'application

$$t \to U(\frac{L}{2\pi}t)$$

est dans l'espace $\mathcal{T}$ définie en partie III. Montrer l'inégalité isopérimétrique

$$\mathcal{A} \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

Rémy Nicolai Awirti

Corrigé

Partie I.

1. La fonction cotan est définie dans $]0,\pi[$. L'hypothèse sur a et b entraîne

$$t\in]a,b[\Rightarrow t-a\in]0,b-a[\subset]0,\pi[$$

La fonction cotan n'est pas définie en 0 donc la fonction φ n'est pas définie en a.
En revanche, lorsque $b-a<\pi$, la fonction cotan est définie et continue en $b-a$ donc la fonction φ est définie et continue en b comme produit de deux fonctions continues. On remarque que dans ce cas $\varphi(b)=0$ car $f(b)=0$.
Pour prolonger par continuité, il suffit de montrer que les fonctions admettent des limites finies. On utilise des développements en exploitant $f(a)=f(b)=0$ ainsi que $\text{cotan}(y-\pi)=\text{cotan}(y)$

$$\text{En } a\ :\quad \left.\begin{aligned}\text{cotan}(x-a)=&\frac{1}{x-a}+o(1)\\ f(x)=&f'(a)x+o(x-a)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(x)=f'(a)+o(1)$$

$$\text{En } b=a+\pi\ :\quad \left.\begin{aligned}\text{cotan}(x-a)=&\text{cotan}(x-b)=\frac{1}{x-b}+o(1)\\ f(x)=&f'(b)x+o(x-b)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(x)=f'(b)+o(1)$$

On prolongera donc φ par continuité en posant

$$\varphi(a)=f'(a)\text{ et }\varphi(b)=f'(b)\text{ si }f(b)=0$$

2. On rappelle que
$$\text{cotan}'=-(1+\text{cotan}^2)$$

Calculons la dérivée

$$\begin{aligned}(f\varphi)'(t)&=2f'(t)f(t)\,\text{cotan}(t-a)-f^2(t)(1+\text{cotan}^2(t-a))\\&=-\left(f(t)\,\text{cotan}(t-a)-f'(t)\right)^2-f^2(t)+f'^2(t)\end{aligned}$$

Comme $\varphi=f\,\text{cotan}$, on en déduit la relation demandée en intégrant entre u et v

$$[\varphi f]_u^v=\int_u^v f'^2(t)dt-\int_u^v f^2(t)dt-\int_u^v\left(\varphi(t)-f'(t)\right)^2dt\qquad(1)$$

La *première* question à se poser quant à la validité de la relation proposée est celle de *l'intégrabilité* des fonctions.
Les fonctions f', f et φ sont continues dans $[a,b]$. Les fonctions (carrées) intervenant dans la relation sont aussi continues donc intégrables. Les intégrales s'expriment donc à l'aide de primitives (évidemment continues). On peut alors faire tendre u vers 0 et v vers b dans la relation (1). La fonction $f\varphi$ converge vers 0 dans les deux cas car f s'annule et φ est continue.
La relation

$$0=\int_a^b f'^2(t)dt-\int_a^b f^2(t)dt-\int_a^b\left(\varphi(t)-f'(t)\right)^2dt\qquad(2)$$

est donc parfaitement valide.

3. Avec la relation précédente :

$$\int_u^v\left(\varphi(t)-f'(t)\right)^2dt\geq 0\Rightarrow\int_u^v f^2(t)dt\leq\int_a^b f'^2(t)dt$$

4. a. D'après la relation (2), le cas d'égalité entraîne

$$\int_u^v\left(\varphi(t)-f'(t)\right)^2dt=0\Rightarrow\forall t\in[a,b]:\varphi(t)-f'(t)=0$$

car la fonction $(\varphi-f')^2$ est continue et positive.

b. On suppose toujours que f vérifie l'égalité. La relation du a. signifie que f est solution de l'équation différentielle

$$y'(t)-\text{cotan}(t-a)y(t)=0$$

l'inconnue y étant une fonction définie dans $]a,b[$. Or dans cet intervalle, une primitive de $\text{cotan}(t-a)$ est $\ln(\sin(t-a))$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (donc en particulier f) sont de la forme

$$\lambda e^{\ln(\sin(t-a))}=\lambda\sin(t-a)$$

Cette relation s'étend aux bornes a et b par continuité.

Partie II.

1. Lorsque a et b sont deux zéros de f et qu'il existe une subdivision de $[a,b]$ dont les éléments sont des zéros distants de moins de π, on peut découper l'intégrale par la relation de Chasles et utiliser l'négalité de la partie I.

2. a. Par le changement de variable $u=\lambda t$, on obtient
$$\int_a^b f^2(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} {f_\lambda}^2(u)du = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} {f_\lambda}^2(t)dt$$
de même, toujours avec $u=\lambda t$ et ${f_\lambda}'(x) = \frac{1}{\lambda}f'(\frac{x}{\lambda})$
$$\int_a^b f'^2(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f'^2(\frac{u}{\lambda})du = \lambda\int_{\lambda a}^{\lambda b} {f_\lambda}^2(u)du = \lambda\int_{\lambda a}^{\lambda b} {f_\lambda}^2(t)dt$$

b. Considérons une fonction f nulle en a et b mais non identiquement nulle de sorte que $\int_a^b f^2(t)dt$ et $\int_a^b f'^2(t)dt$ soient non nulles. Considérons pour $\lambda>0$ la fonction f_λ comme indiqué. Alors, d'après le a.,
$$\frac{\int_a^b f^2(t)dt}{\int_a^b f'^2(t)dt} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\int_{\lambda a}^{\lambda b} f_\lambda^2(t)dt}{\int_{\lambda a}^{\lambda b} {f_\lambda}'^2(t)dt} \leq \frac{1}{\lambda^2}$$
en appliquant l'inégalité à la fonction f_λ (elle s'annule en λa et λb).
Ceci est impossible, car en prenant des λ arbitrairement grands on prouve que le quotient de gauche est nul.
L'inégalité n'est donc pas valable sans une certaine contrainte sur les zéros.

Partie III.

1. Il s'agit d'un calcul classique de calcul d'intégrales trigonométriques après transformation de produit en somme. On obtient
$$\forall i\in\{1,\cdots,n\}: \quad \int_0^{2\pi} c_0(t)c_i(t)dt = \int_0^{2\pi} c_0(t)s_i(t)dt = 0$$
$$\int_0^{2\pi} c_0^2(t)dt = \int_0^{2\pi} c_0(t)dt = 2\pi$$
$$\forall (i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2, i\neq j: \quad \int_0^{2\pi} c_i(t)c_j(t)dt = \int_0^{2\pi} s_i(t)s_j(t)dt = 0$$
$$\forall (i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2: \quad \int_0^{2\pi} c_i(t)s_j(t)dt = 0$$
$$\forall i\in\{1,\cdots,n\}: \quad \int_0^{2\pi} c_i^2(t)dt = \int_0^{2\pi} s_i^2(t)dt = \pi$$

2. Une fonction f est dans $\mathcal{T}$ si et seulement si
$$\exists(\lambda_0,\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_n)\in\mathbb{R}^{2n+1} \text{ tels que } f=\lambda_0c_0+\cdots+\lambda_nc_n+\mu_1s_1+\cdots+\mu_ns_n$$
D'après les calculs d'intégrales de la question a. :
$$\overline{f}=\lambda_0$$
On a donc :
$$\begin{aligned} f-\overline{f} =&\lambda_1c_1+\cdots+\lambda_nc_n+\mu_1s_1+\cdots+\mu_ns_n \\ f' =&\mu_1c_1+\cdots+n\mu_nc_n-\lambda_1s_1-\cdots-n\lambda_ns_n \end{aligned}$$
Dans les calculs des intégrales des carrées, on développe par linéarité. Tous les termes "croisés" disparaissent d'après 1.. Il reste
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(f-\overline{f})^2 =&\pi\left(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2+\mu_1^2+\cdots+\mu_n^2\right) \\ \int_0^{2\pi} f'^2 =&\pi\left(\lambda_1^2+\cdots+n^2\lambda_n^2+\mu_1^2+\cdots+n^2\mu_n^2\right) \end{aligned}$$
On en déduit :
$$\int_0^{2\pi} f'^2 - \int_0^{2\pi}(f-\overline{f})^2 = \pi\left[(2^2-1)(\lambda_2^2+\mu_2^2)+\cdots+(n^2-1)(\lambda_n^2+\mu_n^2)\right]\geq 0$$

Partie IV.

1. Il suffit d'écrire un carré bien choisi :
$$(u-w)^2\geq 0 \Rightarrow uw\leq\frac{1}{2}(u^2+w^2)$$

2. Considérons la paramétrisation obtenue à partir de M (voir fig 2)

$$f : \begin{cases} [0,\pi] \to \mathcal{E} \\ t \to M(\frac{L}{\pi}t) \end{cases}$$

Elle n'est plus normale, mais la norme de la vitesse reste constante égale à $\frac{L}{\pi}$.
Notons Γ son support (orienté dans le sens direct) et notons $u = x \circ f$, $v = y \circ f$ les coordonnées. Par définition, $u(0) = u(\pi) = 0$. Utilisons l'intégrale curviligne de la forme différentielle xdy pour calculer l'aire.

$$\mathcal{A} = \int_\Gamma xdy + \int_{\Gamma_1} xdy$$

où Γ_1 est le segment $M(L)M(0)$ situé sur l'axe des y. En particulier $x(m) = 0$ pour tout point $m \in \Gamma_1$ ce qui entraîne $\int_{\Gamma_1} xdy$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \int_\Gamma xdy = \int_0^\pi u(t)v'(t)dt &\leq \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi v'^2(t)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\pi u'^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi v'^2(t)dt \text{ d'après I.3.} \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(u'^2(t) + v'^2(t)\right)dt = \frac{L^2}{2\pi} \text{ d'après la norme de la vitesse}\end{aligned}$$

Lorsque l'égalité se produit, on doit avoir

$$\int_0^\pi u^2(t)dt = \int_0^\pi u'^2(t)dt$$

Ce qui entraine d'après I.4. que u est de la forme $\lambda \sin t$. On utilise alors la norme de la vitesse :

$$\lambda^2 \cos^2 t + v'^2(t) = \frac{L^2}{\pi^2} \Rightarrow v'^2(t) = \lambda^2 \sin^2 t$$

Par continuité et à cause de l'orientation, on doit avoir :

$$v(t) = -\frac{L}{\pi}\cos t, \qquad u(t) = \frac{L}{\pi}\sin t$$

La courbe doit donc être un demi-cercle.

3. Le raisonnement est semblable à celui du dessus. En appliquant à u l'inégalité III.2 au lieu de I.3. car on travaille sur un intervalle de longueur 2π. Pour pouvoir appliquer cette inégalité, il faut que u soit de moyenne nulle. On peut réaliser cette condition en changeant de repère. La nouvelle origine est placée au point dont les coordonnées sont les valeurs moyennes des abscisses et des ordonnées des points de la courbe dans le repère initial.
On introduit la paramétrisation

$$f : \begin{cases} [0,2\pi] \to \mathcal{E} \\ t \to M(\frac{L}{2\pi}t) \end{cases}$$

qui n'est plus normale mais dont la vitesse est constante en norme. On note u et v les coordonnées de M (ce sont des fonctions). On peut écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \int_\Gamma xdy = \int_0^{2\pi} u(t)v'(t)dt &\leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v'^2(t)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u'^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v'^2(t)dt \text{ d'après III.2.} \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(u'^2(t) + v'^2(t)\right)dt = \frac{L^2}{4\pi} \text{ d'après la norme de la vitesse}\end{aligned}$$