Énoncé

On considère une équation différentielle

$$z' = 1 + z^2 \qquad (1)$$

Une solution est une fonction définie et dérivable dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs *complexes*.

Partie 1. Nature des trajectoires

1. Déterminer les solutions qui sont des fonctions constantes définies dans $\mathbb{R}$.
2. Donner une solution à valeurs réelles en précisant soigneusement son intervalle de définition.
3. Soit z une fonction à valeurs complexes définie et dérivable dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. Former un système $(\mathcal{S})$ de relations entre x, y et leurs dérivées tel que z soit solution de (1) si et seulement si x et y vérifient $(\mathcal{S})$.
4. Soit z une solution de (1). Calculer la dérivée de
$$\frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}$$
5. À toute solution non constante z de (1) définie dans un intervalle I, on associe la courbe paramétrée Z telle que, pour tout $t \in I$, $Z(t)$ est le point d'affixe $z(t)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On suppose que $0 \in I$ avec $z(0) = i\lambda$ pour λ réel non nul. Montrer que le support (trajectoire) c'est à dire l'ensemble de points
$$\{Z(t), t \in I\}$$
est inclus dans une courbe géométrique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques en fonction de λ. Quels sont les points d'intersection de cette courbe avec l'axe (Oy) ?

Partie 2. Expressions des solutions

On cherche ici à exprimer les solutions de (1) à l'aide de fonctions usuelles.

1. a. Déterminer l'ensemble des fonctions à valeurs complexes vérifiant
$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: z'(t) + 2\tan(t)\, z(t) = 0$$
b. Déterminer l'ensemble des fonctions à valeurs complexes vérifiant
$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: z'(t) + 2\tan(t)\, z(t) = -1$$
2. Soit I un intervalle inclus dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et contenant 0.
Soit z une solution de (1) définie et dérivable dans I telle que $z(0) = i\lambda$ avec λ réel non nul.
a. Montrer que $z(t) \neq \tan t$ pour tout $t \in I$.
b. Former une équation différentielle dont la fonction définie dans I par
$$t \to \frac{1}{z(t) - \tan(t)}$$
est solution.
c. Pour tout t de I, exprimer $z(t)$ comme un quotient ne contenant que λ, i et $\tan(t)$.
3. Soit I un intervalle inclus dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et contenant 0. Soit z une solution de (1) définie et dérivable dans I telle que $z(0) = \lambda$ avec λ un nombre réel non nul.
a. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant 0 et inclus dans I tel que
$$\forall t \in J : z(t) \neq \tan(t)$$
b. Pour tout t de I, exprimer $z(t)$ comme un quotient ne contenant que λ et $\tan(t)$. En déduire que
$$\forall t \in J : z(t) = \tan(t + t_0) \text{ avec } t_0 = \arctan(\lambda)$$

Partie 3. Projection stéréographique

Dans un espace orienté $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on note N le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon 1.
Les fonctions coordonnées relatives à ce repère sont désignées par x, y, z. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sera noté $(\overrightarrow{u}/\overrightarrow{v})$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = 0$. Il est muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ce qui permet de définir l'affixe complexe $w = x(W) + iy(W)$ d'un point W de ce plan.

1. Pour chaque point $M \in \mathcal{S} - \{N\}$ de coordonnées (α, β, γ), on considère la droite (NM) (voir figure 1). Son intersection avec le plan $\mathcal{P}$ est formée d'un seul point noté W d'affixe w appelé le projeté stéréographique de M.

Rémy Nicolai Aricatti

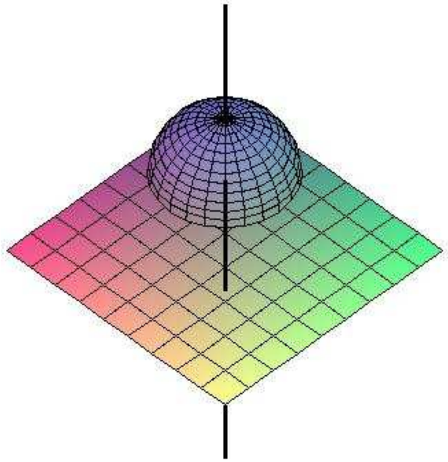

FIG. 1: Projection stéréographique

a. Montrer que $\gamma \neq 1$ et que $w = \dfrac{\alpha + i\beta}{1-\gamma}$. Montrer que $w = \dfrac{1+\gamma}{\alpha - i\beta}$ si $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Dans quel cas peut-on avoir $(\alpha, \beta) = (0,0)$?

b. Montrer que

$$\alpha = \frac{\overline{w} + w}{|w|^2+1} \qquad \beta = i\frac{\overline{w} - w}{|w|^2+1} \qquad \gamma = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}$$

c. Préciser $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ et $\frac{\beta}{1-\gamma}$ en fonction de w, $\overline{w}$ et i.

Dans la suite de cette partie, $\overrightarrow{\Omega}$ est un vecteur fixé de coordonnées (p,q,r). On considère une courbe paramétrée définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} I &\to \mathcal{E} \\ t &\to M(t) \end{aligned}$$

et à valeurs *dans l'espace* $\mathcal{E}$. Pour chaque $t \in I$, les coordonnées de $M(t)$ sont $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$. Ainsi α, β, γ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que cette courbe paramétrée est dérivable et vérifie

$$\forall t \in I : \overrightarrow{M'}(t) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM(t)}$$

2. Montrer que $\|\overrightarrow{OM(t)}\|$ et $(\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{OM(t)})$ sont indépendantes de t. Que peut-on en déduire pour l'ensemble des points $M(t)$?
3. On considère un repère orthonormé direct

$$(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}) \text{ avec } \overrightarrow{K} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\Omega}\|}\overrightarrow{\Omega}$$

   Les coordonnées de $M(t)$ dans ce repère sont notées $(X(t), Y(t), Z(t))$. Former le système d'équations différentielles vérifiées par X, Y, Z.
4. On suppose que pour tous les t de I, $M(t) \in \mathcal{S} - \{N\}$. On note $w(t)$ l'affixe complexe du projeté stéréographique de $M(t)$.
   a. Vérifier que

$$w'(t) = \frac{\alpha'(t) + i\beta'(t) + w(t)\gamma'(t)}{1-\gamma(t)}$$

   b. Vérifier que

$$\begin{aligned} &\alpha'(t) + i\beta'(t) + w(t)\gamma'(t) \\ &\quad = ir(\alpha(t) + i\beta(t)) + (q - ip)\gamma(t) - w(t)q(\alpha + i\beta) + w(t)(p+iq)\beta(t) \end{aligned}$$

   c. En déduire les nombres complexes a, b, c tels que

$$w'(t) = a + bw(t) + cw^2(t)$$

   Cette relation est une forme particulière de l'équation différentielle dite *de Ricatti*. Pour quelles valeurs de p, q, r retrouve-t-on l'équation (1) ?

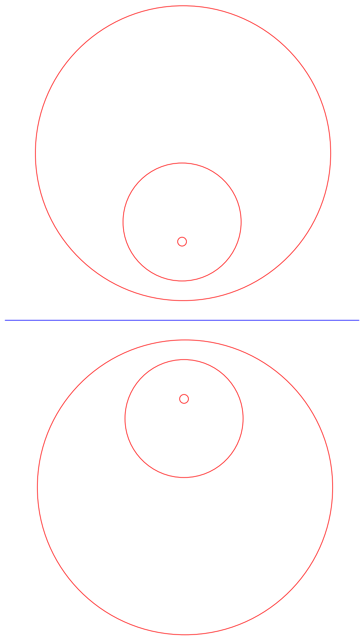

FIG. 2: Trajectoires de $z' = 1 + z^2$.

Corrigé

Partie 1. Nature des trajectoires

1. Si v est la valeur complexe d'une fonction constante solution de l'éqation différentielle, elle doit vérifier
$$1 + v^2 = 0$$
On en déduit qu'il existe deux solutions constantes, elles ont pour valeur $+i$ et $-i$.

2. La restriction à $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ de la fonction tan est solution de l'équation (1).

3. En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système
$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x' = 1 + x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

4. On utilise encore les notations x et y de la question précédente.
$$\left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right)' = \frac{y'}{1+x^2+y^2} - \frac{2y(xx'+yy')}{(1+x^2+y^2)^2}$$
En multipliant les lignes de $(\mathcal{S})$ par x et y, on obtient :
$$xx' + yy' = x + x^3 + xy^2 = x(1+x^2+y^2) \Rightarrow \left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right)' = 0$$

5. Dans la question précédente, on a montré qu'une certaine expression était constante. Prenons sa valeur en 0.
$$\frac{y(t)}{1+x(t)+y(t)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \Leftrightarrow x^2(t) - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) y(t) + y^2(t) = -1$$
$$\Leftrightarrow x^2(t) + \left(y(t) - \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda})\right)^2 = -1 + \frac{1}{4}(\lambda + \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{\lambda})^2$$
On en déduit que la trajectoire est incluse dans le cercle :
$$\text{coordonnées du centre : } \left(0, \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda})\right) \qquad \text{rayon : } \frac{1}{2}\left|\lambda - \frac{1}{\lambda}\right|$$
La figure 2 présente le tracé de quelques trajectoires pour des valeurs de λ. Les points d'intersection avec l'axe (Oy) ont pour ordonnées :
$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \pm \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda \text{ ou } \frac{1}{\lambda}$$

Partie 2. Expressions des solutions.

1. a. Les solutions sont de la forme $t \to \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et A une primitive de $t \to 2\tan t$.
Dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le cos est strictement positif. On peut choisir $A(t) = \ln(\cos(t))$. Les solutions sont donc les fonctions
$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: t \to \lambda \cos^2 t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$
b. On utilise la méthode de variation des constantes. On cherche une solution particulière sous la forme $t \to \lambda(t)\cos^2 t$. La fonction λ doit vérifier
$$\lambda'(t)\cos^2 t = -1$$

Rémy Nicolai Aricatti

On peut donc choisir $\lambda(t) = -\tan t$ ce qui conduit à la solution particulière

$$t \to -\tan t \cos^2 t = -\sin t \cos t$$

Les solutions sont donc les fonctions

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: t \to -\sin t \cos t + \lambda \cos^2 t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

2. a. Ici z est une solution telle que $z(0) = i\lambda$ avec λ réel non nul. D'après la question 4. de la première partie, on a (pour *tous* les t de I) :

$$\frac{\operatorname{Im}(z(t))}{1+|z(t)|^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq 0$$

On en déduit que, pour tous les t dans I, $z(t) \notin \mathbb{R}$. En particulier, il ne peut pas être égal à $\tan t$.
On aurait pu aussi raisonner en terme de problème de Cauchy.

b. Notons $u(t) = \frac{1}{z(t)-\tan t}$. On a alors $z(t) - \tan t = \frac{1}{u(t)}$ et on peut déduire :

$$\left.\begin{aligned} z'(t) &= 1 + z^2(t) \\ \tan' t &= 1 + \tan^2 t \\ (\frac{1}{u})' &= -\frac{u'(t)}{u^2(t)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow z^2(t) - \tan^2 t = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{z(t)+\tan t}{u(t)} = -\frac{u'(t)}{u^2(t)} \Rightarrow \frac{2\tan t}{u(t)} + \frac{1}{u(t)^2} = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$$
$$\Rightarrow u'(t) + 2\tan(t)\, u(t) = -1$$

La fonction u vérifie donc l'équation différentielle de la question 1.b.

c. D'après la question précédente et le résultat de la question 1.b, il existe un nombre complexe μ tel que :

$$\forall t \in I : \frac{1}{z(t) - \tan t} = \mu \cos^2 t - \sin t \cos t$$

En prenant la valeur en 0, on obtient $\mu = -\frac{i}{\lambda}$. On en déduit :

$$z(t) - \tan t = \frac{1}{-\frac{i}{\lambda}\cos^2 t - \sin t \cos t}$$
$$\Rightarrow z(t) = \tan t - \frac{1+\tan^2 t}{\tan t + \frac{i}{\lambda}} = \frac{\frac{i}{\lambda}\tan t - 1}{\tan t + \frac{i}{\lambda}} = \frac{\tan t + \lambda i}{1 - i\lambda \tan t}$$

3. Dans cette question z est une solution définie dans un intervalle I contenant 0 et telle que $z(0) = \lambda \neq 0$.

a. La fonction $t \to z(t) - \tan t$ est continue en 0 et elle prend en 0 une valeur non nulle. Par continuité, il existe donc un intervalle J dans lequel elle ne s'annule pas. Ici encore, on aurait pu raisonner en terme de problème de Cauchy. S'il existe un t_0 tel que $z(t_0) = \tan(t_0)$ alors les deux fonctions sont solutions d'une même problème de Cauchy en t_0 elles doivent donc coïncider dans leur domaine ; en particulier en 0 ce qui est contraire à l'hypothèse.
On peut considérer l'inverse dans J de $z - \tan$.

b. Les calculs sont les mêmes qu'en 2.. La fonction indiquée vérifie l'équation différentielle de la question 1.b. Il existe un nombre complexe μ tel que

$$\forall t \in J : \frac{1}{z(t) - \tan t} = \mu \cos^2 t - \sin t \cos t$$

En prenant $t = 0$, on obtient que $\mu = \frac{1}{\lambda}$ est réel et

$$z(t) - \tan t = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}\cos^2 t - \sin t \cos t}$$
$$\Rightarrow z(t) = \tan t + \frac{1+\tan^2 t}{\frac{1}{\lambda} - \tan t} = \frac{\frac{1}{\lambda}\tan t + 1}{\frac{1}{\lambda} - \tan t} = \frac{\tan t + \lambda}{1 - \lambda \tan t}$$
$$= \tan(t + t_0) \text{ si } t_0 = \arctan \lambda$$

On aurait aussi pu raisonner en *séparant les variables*, lorsque z est à valeurs réelles

$$\forall t \in J : \frac{z'(t)}{1+z^2(t)} = 1 \Rightarrow t \to \arctan(z(t)) - t \text{ est constante.}$$

Partie 3. Projection stéréographique.

1. a. Le seul point de la sphère pour lequel $\gamma = 1$ est le pôle nord N qui est exclu. En revanche $\alpha = \beta = 0$ est aussi possible pour le pôle sud de coordonnées $(0, 0, -1)$. Lorsque $M \neq N$, on peut former une représentation paramétrique de la droite (NM). Les coordonnées d'un point de cette droite sont de la forme $(\lambda\alpha, \lambda\beta, 1 + \lambda(\gamma - 1))$ avec λ réel. Un tel point est sur le plan si et seulement si

$$1 + \lambda(\gamma - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-\gamma}$$

On en déduit que l'affixe du projeté stéréographique est

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1-\gamma}$$

De plus, lorsque $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$,

$$w = w\frac{\alpha - i\beta}{\alpha - i\beta} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{(1-\gamma)(\alpha - i\beta)} = \frac{1+\gamma}{\alpha - i\beta}$$

car $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ donc $\alpha^2+\beta^2 = 1-\gamma^2$.

b. D'après la question précédente :

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{\alpha+i\beta}{1-\gamma} \\ \overline{w} &= \frac{\alpha+i\beta}{1-\gamma} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} w+\overline{w} = \dfrac{2\alpha}{1-\gamma} \\ w-\overline{w} = \dfrac{2i\beta}{1-\gamma} \end{cases}$$

$$|w|^2+1 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{(1-\gamma)^2}+1 = \frac{\alpha^2+\beta^2+1-2\gamma+\gamma^2}{(1-\gamma)^2} = \frac{2(1-\gamma)}{(1-\gamma)^2} = \frac{2}{1-\gamma}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{w+\overline{w}}{1+|w|^2} \qquad i\beta = \frac{w-\overline{w}}{1+|w|^2}$$

On a aussi

$$1-\gamma = \frac{2}{|w|^2+1} \Rightarrow \gamma = 1 - \frac{2}{|w|^2+1} = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}$$

c. Il s'agit d'une petite question technique qui servira dans le calcul de la question 4.c. Avec les formules précédentes, on obtient

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\,\frac{|w|^2+1}{2} = \frac{|w|^2-1}{2}$$
$$\frac{\beta}{1-\gamma} = \frac{i(\overline{w}-w)}{|w|^2+1}\,\frac{|w|^2+1}{2} = i\frac{\overline{w}-w}{2}$$

2. Il s'agit ici d'utiliser les formules du cours permettant de dériver des fonctions formées à partir de produits scalaires. Les deux dérivées sont nulles car $\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM(t)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega}$ et à $\overrightarrow{OM(t)}$.

$$\frac{d}{dt}\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\| = \frac{(\overrightarrow{OM(t)}/\overrightarrow{M'}(t))}{\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{OM(t)}) = (\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{M'}(t))) = 0$$

Le caractère constant de $t \to \left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|$ montre que $M(t)$ reste sur une sphère centrée en O.
Le caractère constant de $t \to (\overrightarrow{\Omega}/\overrightarrow{OM(t)})$ montre que $M(t)$ reste sur un plan orthogonal à $\overrightarrow{\Omega}$.
Le point $M(t)$ reste donc sur un cercle intersection d'une sphère et d'un plan.

3. Dans le repère choisi, seule la dernière coordonnée de $\overrightarrow{\Omega}$ est non nulle. On en déduit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\overrightarrow{\Omega}\| \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\|\overrightarrow{\Omega}\|Y \\ \|\overrightarrow{\Omega}\|X \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X'(t) = -\|\overrightarrow{\Omega}\|Y(t) \\ Y'(t) = \|\overrightarrow{\Omega}\|X(t) \\ Z'(t) = 0 \end{cases}$$

4. a. On dérive simplement l'expression de $w(t)$ obtenue en 1.a. en se dispensant d'écrire les (t)

$$w' = \frac{\alpha'+i\beta'}{1-\gamma} + \underbrace{\frac{\alpha+i\beta}{1-\gamma}}_{=w}\frac{\gamma'}{1-\gamma} = \frac{\alpha'+i\beta'+w\gamma'}{1-\gamma}$$

b. On obtient la formule annoncée en injectant les expressions des dérivées

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

dans la formule de la question précédente.

c. Divisons par $1-\gamma$ l'expression du 1.b. On obtient une expression de w'.

$$w'(t) = irw(t) + (q-ip)\frac{\gamma(t)}{1-\gamma(t)} - qw^2(t) + w(t)(p+iq)\frac{\beta(t)}{1-\gamma(t)}$$

dans laquelle figurent les quantités calculées en 1.c. En développant, les $|w^2|$ disparaissent et on obtient

$$w'(t) = irw(t) - \frac{1}{2}(q-ip) - qw^2(t) + \frac{1}{2}(q-ip)w^2 = a + bw(t) + cw^2(t)$$

Rémy Nicolai Aricatti

avec

$$a = \frac{1}{2}(-q + ip) \qquad b = ir \qquad c = -\frac{1}{2}(q + ip) = \overline{a}$$

On retrouve l'équation (1) de la tangente pour $a = 1$ et $b = 0$ soit $p = 0$, $q = -2$, $r = 0$.