

## Énoncé

On considère une équation différentielle

$$z' = 1 + z^2 \quad (1)$$

Une solution est une fonction définie et dérivable dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs complexes.

### Partie 1. Nature des trajectoires

- Déterminer les solutions qui sont des fonctions constantes définies dans  $\mathbb{R}$ .
- Donner une solution à valeurs réelles en précisant soigneusement son intervalle de définition.
- Soit  $z$  une fonction à valeurs complexes définie et dérivable dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On pose  $x = \operatorname{Re}(z)$  et  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Former un système  $(\mathcal{S})$  de relations entre  $x$ ,  $y$  et leurs dérivées tel que  $z$  soit solution de (1) si et seulement si  $x$  et  $y$  vérifient  $(\mathcal{S})$ .
- Soit  $z$  une solution de (1). Calculer la dérivée de

$$\frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}$$

- À toute solution non constante  $z$  de (1) définie dans un intervalle  $I$ , on associe la courbe paramétrée  $Z$  telle que, pour tout  $t \in I$ ,  $Z(t)$  est le point d'affixe  $z(t)$  dans un plan muni d'un repère orthonormé. On suppose que  $0 \in I$  avec  $z(0) = i\lambda$  pour  $\lambda$  réel non nul. Montrer que le support (trajectoire) c'est à dire l'ensemble de points

$$\{Z(t), t \in I\}$$

est inclus dans une courbe géométrique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques en fonction de  $\lambda$ . Quels sont les points d'intersection de cette courbe avec l'axe  $(Oy)$  ?

### Partie 2. Expressions des solutions

On cherche ici à exprimer les solutions de (1) à l'aide de fonctions usuelles.

- a. Déterminer l'ensemble des fonctions à valeurs complexes vérifiant

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ : z'(t) + 2 \tan(t) z(t) = 0$$

- b. Déterminer l'ensemble des fonctions à valeurs complexes vérifiant

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ : z'(t) + 2 \tan(t) z(t) = -1$$

- Soit  $I$  un intervalle inclus dans  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et contenant 0. Soit  $z$  une solution de (1) définie et dérivable dans  $I$  telle que  $z(0) = i\lambda$  avec  $\lambda$  réel non nul.
  - Montrer que  $z(t) \neq \tan t$  pour tout  $t \in I$ .
  - Former une équation différentielle dont la fonction définie dans  $I$  par

$$t \rightarrow \frac{1}{z(t) - \tan(t)}$$

est solution.

- Pour tout  $t$  de  $I$ , exprimer  $z(t)$  comme un quotient ne contenant que  $\lambda$ ,  $i$  et  $\tan(t)$ .
- Soit  $I$  un intervalle inclus dans  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et contenant 0. Soit  $z$  une solution de (1) définie et dérivable dans  $I$  telle que  $z(0) = \lambda$  avec  $\lambda$  un nombre réel non nul.
    - Montrer qu'il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant 0 et inclus dans  $I$  tel que

$$\forall t \in J : z(t) \neq \tan(t)$$

- Pour tout  $t$  de  $I$ , exprimer  $z(t)$  comme un quotient ne contenant que  $\lambda$  et  $\tan(t)$ . En déduire que

$$\forall t \in J : z(t) = \tan(t + t_0) \text{ avec } t_0 = \arctan(\lambda)$$

### Partie 3. Projection stéréographique

Dans un espace orienté  $\mathcal{E}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on note  $N$  le point de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $O$  et de rayon 1.

Les fonctions coordonnées relatives à ce repère sont désignées par  $x, y, z$ . Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sera noté  $(\vec{u} / \vec{v})$ .

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $z = 0$ . Il est muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ce qui permet de définir l'affixe complexe  $w = x(W) + iy(W)$  d'un point  $W$  de ce plan.

- Pour chaque point  $M \in \mathcal{S} - \{N\}$  de coordonnées  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , on considère la droite  $(NM)$  (voir figure 1). Son intersection avec le plan  $\mathcal{P}$  est formée d'un seul point noté  $W$  d'affixe  $w$  appelé le projeté stéréographique de  $M$ .

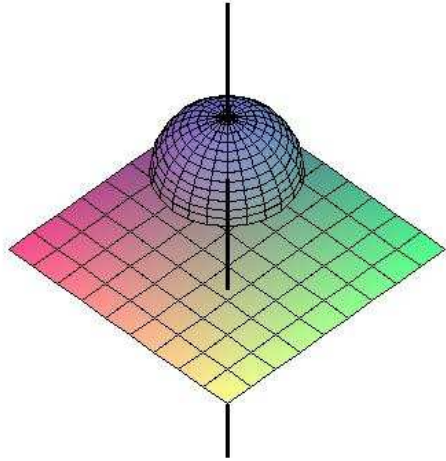


FIG. 1: Projection stéréographique

a. Montrer que  $\gamma \neq 1$  et que  $w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma}$ . Montrer que  $w = \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta}$  si  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . Dans quel cas peut-on avoir  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  ?

b. Montrer que

$$\alpha = \frac{\bar{w} + w}{|w|^2 + 1} \quad \beta = i \frac{\bar{w} - w}{|w|^2 + 1} \quad \gamma = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}$$

c. Préciser  $\frac{\gamma}{1 - \gamma}$  et  $\frac{\beta}{1 - \gamma}$  en fonction de  $w$ ,  $\bar{w}$  et  $i$ .

Dans la suite de cette partie,  $\vec{\Omega}$  est un vecteur fixé de coordonnées  $(p, q, r)$ . On considère une courbe paramétrée définie dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathcal{E} \\ t &\rightarrow M(t) \end{aligned}$$

et à valeurs dans l'espace  $\mathcal{E}$ . Pour chaque  $t \in I$ , les coordonnées de  $M(t)$  sont  $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ . Ainsi  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que cette courbe paramétrée est dérivable et vérifie

$$\forall t \in I : \vec{M}'(t) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)$$

2. Montrer que  $\|\overrightarrow{OM}(t)\|$  et  $(\vec{\Omega} / \overrightarrow{OM}(t))$  sont indépendantes de  $t$ . Que peut-on en déduire pour l'ensemble des points  $M(t)$  ?
3. On considère un repère orthonormé direct

$$(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \text{ avec } \vec{K} = \frac{1}{\|\vec{\Omega}\|} \vec{\Omega}$$

Les coordonnées de  $M(t)$  dans ce repère sont notées  $(X(t), Y(t), Z(t))$ . Former le système d'équations différentielles vérifiées par  $X, Y, Z$ .

4. On suppose que pour tous les  $t$  de  $I$ ,  $M(t) \in \mathcal{S} - \{N\}$ . On note  $w(t)$  l'affixe complexe du projeté stéréographique de  $M(t)$ .
  - a. Vérifier que

$$w'(t) = \frac{\alpha'(t) + i\beta'(t) + w(t)\gamma'(t)}{1 - \gamma(t)}$$

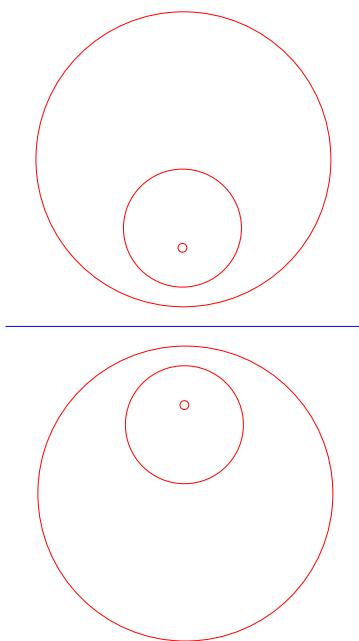
b. Vérifier que

$$\begin{aligned} &\alpha'(t) + i\beta'(t) + w(t)\gamma'(t) \\ &= ir(\alpha(t) + i\beta(t)) + (q - ip)\gamma(t) - w(t)q(\alpha + i\beta) + w(t)(p + iq)\beta(t) \end{aligned}$$

c. En déduire les nombres complexes  $a, b, c$  tels que

$$w'(t) = a + bw(t) + cw^2(t)$$

Cette relation est une forme particulière de l'équation différentielle dite *de Riccati*. Pour quelles valeurs de  $p, q, r$  retrouve-t-on l'équation (1) ?

FIG. 2: Trajectoires de  $z' = 1 + z^2$ .

## Corrigé

### Partie 1. Nature des trajectoires

1. Si  $v$  est la valeur complexe d'une fonction constante solution de l'équation différentielle, elle doit vérifier

$$1 + v^2 = 0$$

On en déduit qu'il existe deux solutions constantes, elles ont pour valeur  $+i$  et  $-i$ .

2. La restriction à  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  de la fonction  $\tan$  est solution de l'équation (1).
3. En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système

$$(S) \begin{cases} x' = 1 + x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

4. On utilise encore les notations  $x$  et  $y$  de la question précédente.

$$\left( \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \right)' = \frac{y'}{1 + x^2 + y^2} - \frac{2y(xx' + yy')}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

En multipliant les lignes de (S) par  $x$  et  $y$ , on obtient :

$$xx' + yy' = x + x^3 + xy^2 = x(1 + x^2 + y^2) \Rightarrow \left( \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \right)' = 0$$

5. Dans la question précédente, on a montré qu'une certaine expression était constante. Prenons sa valeur en 0.

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{1 + x(t) + y(t)} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} &\Leftrightarrow x^2(t) - \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) y(t) + y^2(t) = -1 \\ &\Leftrightarrow x^2(t) + \left( y(t) - \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \right)^2 = -1 + \frac{1}{4} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que la trajectoire est incluse dans le cercle :

$$\text{coordonnées du centre : } \left( 0, \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \right) \quad \text{rayon : } \frac{1}{2} \left| \lambda - \frac{1}{\lambda} \right|$$

La figure 2 présente le tracé de quelques trajectoires pour des valeurs de  $\lambda$ . Les points d'intersection avec l'axe ( $Oy$ ) ont pour ordonnées :

$$\frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \pm \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) = \lambda \text{ ou } \frac{1}{\lambda}$$

### Partie 2. Expressions des solutions.

1. a. Les solutions sont de la forme  $t \rightarrow \lambda e^{A(t)}$  où  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $A$  une primitive de  $t \rightarrow 2 \tan t$ . Dans l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , le  $\cos$  est strictement positif. On peut choisir  $A(t) = \ln(\cos(t))$ . Les solutions sont donc les fonctions

$$\forall t \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ : t \rightarrow \lambda \cos^2 t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

- b. On utilise la méthode de variation des constantes. On cherche une solution particulière sous la forme  $t \rightarrow \lambda(t) \cos^2 t$ . La fonction  $\lambda$  doit vérifier

$$\lambda'(t) \cos^2 t = -1$$

On peut donc choisir  $\lambda(t) = -\tan t$  ce qui conduit à la solution particulière

$$t \mapsto -\tan t \cos^2 t = -\sin t \cos t$$

Les solutions sont donc les fonctions

$$\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ : t \mapsto -\sin t \cos t + \lambda \cos^2 t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

2. a. Ici  $z$  est une solution telle que  $z(0) = i\lambda$  avec  $\lambda$  réel non nul. D'après la question 4. de la première partie, on a (pour tous les  $t$  de  $I$ ) :

$$\frac{\operatorname{Im}(z(t))}{1 + |z(t)|^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \neq 0$$

On en déduit que, pour tous les  $t$  dans  $I$ ,  $z(t) \notin \mathbb{R}$ . En particulier, il ne peut pas être égal à  $\tan t$ .

On aurait pu aussi raisonner en terme de problème de Cauchy.

- b. Notons  $u(t) = \frac{1}{z(t) - \tan t}$ . On a alors  $z(t) - \tan t = \frac{1}{u(t)}$  et on peut déduire :

$$\left. \begin{array}{l} z'(t) = 1 + z^2(t) \\ \tan' t = 1 + \tan^2 t \\ \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'(t)}{u^2(t)} \end{array} \right\} \Rightarrow z^2(t) - \tan^2 t = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{z(t) + \tan t}{u(t)} = -\frac{u'(t)}{u^2(t)} \Rightarrow \frac{2 \tan t}{u(t)} + \frac{1}{u(t)^2} = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$$

$$\Rightarrow u'(t) + 2 \tan(t) u(t) = -1$$

La fonction  $u$  vérifie donc l'équation différentielle de la question 1.b.

- c. D'après la question précédente et le résultat de la question 1.b, il existe un nombre complexe  $\mu$  tel que :

$$\forall t \in I : \frac{1}{z(t) - \tan t} = \mu \cos^2 t - \sin t \cos t$$

En prenant la valeur en 0, on obtient  $\mu = -\frac{i}{\lambda}$ . On en déduit :

$$z(t) - \tan t = \frac{1}{-\frac{i}{\lambda} \cos^2 t - \sin t \cos t}$$

$$\Rightarrow z(t) = \tan t - \frac{1 + \tan^2 t}{\tan t + \frac{i}{\lambda}} = \frac{\frac{i}{\lambda} \tan t - 1}{\tan t + \frac{i}{\lambda}} = \frac{\tan t + \lambda i}{1 - i\lambda \tan t}$$

3. Dans cette question  $z$  est une solution définie dans un intervalle  $I$  contenant 0 et telle que  $z(0) = \lambda \neq 0$ .

- a. La fonction  $t \mapsto z(t) - \tan t$  est continue en 0 et elle prend en 0 une valeur non nulle. Par continuité, il existe donc un intervalle  $J$  dans lequel elle ne s'annule pas. Ici encore, on aurait pu raisonner en terme de problème de Cauchy. S'il existe un  $t_0$  tel que  $z(t_0) = \tan(t_0)$  alors les deux fonctions sont solutions d'une même problème de Cauchy en  $t_0$  elles doivent donc coïncider dans leur domaine ; en particulier en 0 ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut considérer l'inverse dans  $J$  de  $z - \tan$ .

- b. Les calculs sont les mêmes qu'en 2.. La fonction indiquée vérifie l'équation différentielle de la question 1.b. Il existe un nombre complexe  $\mu$  tel que

$$\forall t \in J : \frac{1}{z(t) - \tan t} = \mu \cos^2 t - \sin t \cos t$$

En prenant  $t = 0$ , on obtient que  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  est réel et

$$z(t) - \tan t = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} \cos^2 t - \sin t \cos t}$$

$$\Rightarrow z(t) = \tan t + \frac{1 + \tan^2 t}{\frac{1}{\lambda} - \tan t} = \frac{\frac{1}{\lambda} \tan t + 1}{\frac{1}{\lambda} - \tan t} = \frac{\tan t + \lambda}{1 - \lambda \tan t}$$

$$= \tan(t + t_0) \text{ si } t_0 = \arctan \lambda$$

On aurait aussi pu raisonner en *séparant les variables*, lorsque  $z$  est à valeurs réelles

$$\forall t \in J : \frac{z'(t)}{1 + z^2(t)} = 1 \Rightarrow t \mapsto \arctan(z(t)) - t \text{ est constante.}$$

### Partie 3. Projection stéréographique.

1. a. Le seul point de la sphère pour lequel  $\gamma = 1$  est le pôle nord  $N$  qui est exclu. En revanche  $\alpha = \beta = 0$  est aussi possible pour le pôle sud de coordonnées  $(0, 0, -1)$ . Lorsque  $M \neq N$ , on peut former une représentation paramétrique de la droite  $(NM)$ . Les coordonnées d'un point de cette droite sont de la forme  $(\lambda\alpha, \lambda\beta, 1 + \lambda(\gamma - 1))$  avec  $\lambda$  réel. Un tel point est sur le plan si et seulement si

$$1 + \lambda(\gamma - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1 - \gamma}$$

On en déduit que l'afixe du projeté stéréographique est

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma}$$

De plus, lorsque  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ,

$$w = w \frac{\alpha - i\beta}{\alpha - i\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1 - \gamma)(\alpha - i\beta)} = \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta}$$

car  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  donc  $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$ .

b. D'après la question précédente :

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} \left. \vphantom{w} \right\} \Rightarrow \begin{cases} w + \bar{w} = \frac{2\alpha}{1 - \gamma} \\ w - \bar{w} = \frac{2i\beta}{1 - \gamma} \end{cases}$$

$$|w|^2 + 1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1 - \gamma)^2} + 1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2\gamma + \gamma^2}{(1 - \gamma)^2} = \frac{2(1 - \gamma)}{(1 - \gamma)^2} = \frac{2}{1 - \gamma}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{w + \bar{w}}{1 + |w|^2} \qquad i\beta = \frac{w - \bar{w}}{1 + |w|^2}$$

On a aussi

$$1 - \gamma = \frac{2}{|w|^2 + 1} \Rightarrow \gamma = 1 - \frac{2}{|w|^2 + 1} = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}$$

c. Il s'agit d'une petite question technique qui servira dans le calcul de la question 4.c. Avec les formules précédentes, on obtient

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \frac{|w|^2 + 1}{2} = \frac{|w|^2 - 1}{2}$$

$$\frac{\beta}{1 - \gamma} = \frac{i(\bar{w} - w)}{|w|^2 + 1} \frac{|w|^2 + 1}{2} = i \frac{\bar{w} - w}{2}$$

2. Il s'agit ici d'utiliser les formules du cours permettant de dériver des fonctions formées à partir de produits scalaires. Les deux dérivées sont nulles car  $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)$  est orthogonal

à  $\vec{\Omega}$  et à  $\overrightarrow{OM}(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\| = \frac{(\overrightarrow{OM}(t) / \overrightarrow{M}'(t))}{\left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|} = 0 \qquad \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} / \overrightarrow{OM}(t)) = (\vec{\Omega} / \overrightarrow{M}'(t)) = 0$$

Le caractère constant de  $t \rightarrow \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|$  montre que  $M(t)$  reste sur une sphère centrée en  $O$ .

Le caractère constant de  $t \rightarrow (\vec{\Omega} / \overrightarrow{OM}(t))$  montre que  $M(t)$  reste sur un plan orthogonal à  $\vec{\Omega}$ .

Le point  $M(t)$  reste donc sur un cercle intersection d'une sphère et d'un plan.

3. Dans le repère choisi, seule la dernière coordonnée de  $\vec{\Omega}$  est non nulle. On en déduit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{\Omega}\| \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\|\vec{\Omega}\|Y \\ \|\vec{\Omega}\|X \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X'(t) = -\|\vec{\Omega}\|Y(t) \\ Y'(t) = \|\vec{\Omega}\|X(t) \\ Z'(t) = 0 \end{cases}$$

4. a. On dérive simplement l'expression de  $w(t)$  obtenue en 1.a. en se dispensant d'écrire les  $(t)$

$$w' = \frac{\alpha' + i\beta'}{1 - \gamma} + \underbrace{\frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma}}_{=w} \frac{\gamma'}{1 - \gamma} = \frac{\alpha' + i\beta' + w\gamma'}{1 - \gamma}$$

b. On obtient la formule annoncée en injectant les expressions des dérivées

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

dans la formule de la question précédente.

c. Divisons par  $1 - \gamma$  l'expression du 1.b. On obtient une expression de  $w'$ .

$$w'(t) = irw(t) + (q - ip) \frac{\gamma(t)}{1 - \gamma(t)} - qw^2(t) + w(t)(p + iq) \frac{\beta(t)}{1 - \gamma(t)}$$

dans laquelle figurent les quantités calculées en 1.c. En développant, les  $|w^2|$  disparaissent et on obtient

$$w'(t) = irw(t) - \frac{1}{2}(q - ip) - qw^2(t) + \frac{1}{2}(q - ip)w^2 = a + bw(t) + cw^2(t)$$

avec

$$a = \frac{1}{2}(-q + ip) \quad b = ir \quad c = -\frac{1}{2}(q + ip) = \bar{a}$$

On retrouve l'équation (1) de la tangente pour  $a = 1$  et  $b = 0$  soit  $p = 0$ ,  $q = -2$ ,  
 $r = 0$ .