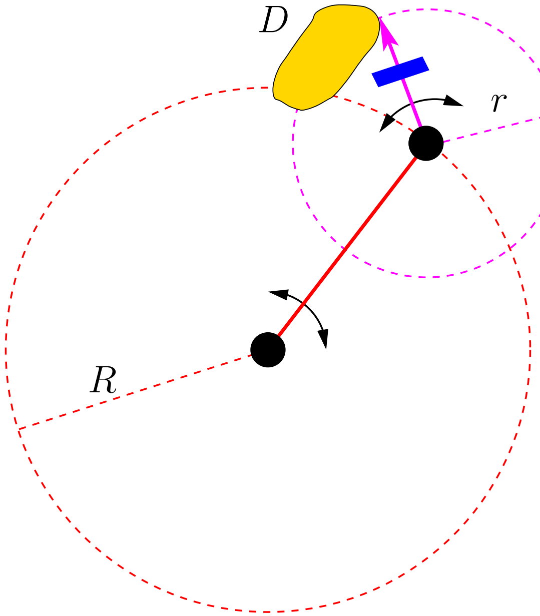

FIG. 1: planimètre

Énoncé

Un *planimètre* est un dispositif mécanique permettant de mesurer l'aire d'une portion de plan définie par une courbe fermée.
Ce dispositif est formé de deux tiges rigides. La première (de longueur R) peut tourner autour d'un point fixé. La deuxième (de longueur r) peut tourner autour de l'extrémité de la première. Une roulette est fixée perpendiculairement à la deuxième tige (en bleu sur la figure 1). L'extrémité de la deuxième tige décrit une courbe fermée formant le bord d'un domaine D.
Lors du déplacement du point autour de la courbe, la roulette glisse et tourne. On souhaite montrer que l'aire de la partie de plan définie par la courbe est proportionnelle à la distance parcourue par la roulette en tournant.

1. Quel est l'ensemble des points que peut-atteindre l'extrémité de la deuxième tige ?
2. Préciser une partie du plan Ω telle que si $m \in \Omega$, il existe un unique couple $(\alpha(m), \beta(m))$ de réel entre 0 et π tels que m soit l'extrémité de la deuxième tige avec $\alpha(m)$ égal à l'angle de la première tige avec l'axe horizontal et $\beta(m)$ égal à l'angle de la deuxième tige avec l'axe horizontal.
   Dans toute la suite on se place dans cette partie Ω du plan. Les *fonctions* α, β, x, y sont définies dans Ω et à valeurs réelles ($x(m)$ et $y(m)$ sont les coordonnées de m). On suppose aussi que la courbe fermée est dans Ω.

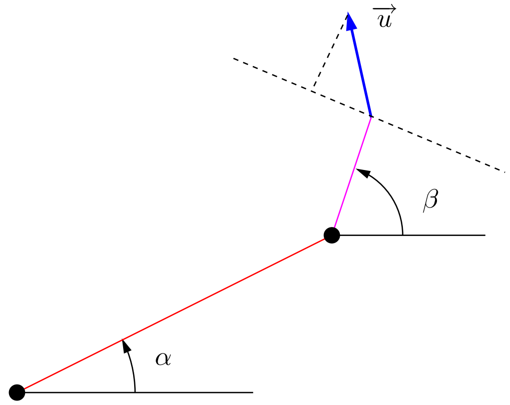

FIG. 2: Système de coordonnées (α, β)

3. Exprimer x et y en fonction de α et β. En déduire l'expression de l'élément de surface $dx \wedge dy$ en fonction de $d\alpha$ et $d\beta$.
4. Soit $\overrightarrow{u}(m)$ un vecteur unitaire perpendiculaire à la deuxième tige et ω la forme differentielle
$$\omega_m(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}(m)/\overrightarrow{v})$$
   Exprimer ω en fonction de $d\alpha$ et $d\beta$. Conclure

Corrigé

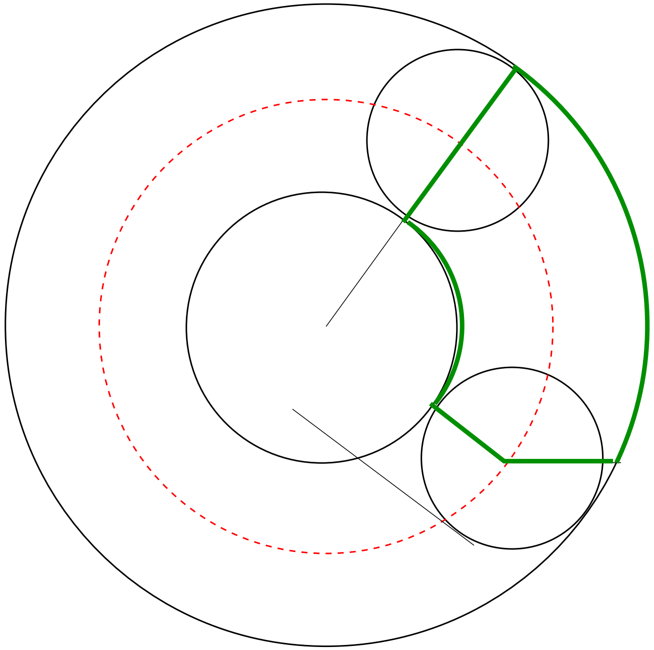

FIG. 3: Domaine Ω

1. L'ensemble des points que peut atteindre l'extrémité de la deuxième tige est la couronne entre les cercles de rayon $R-r$ et $R+r$. Dans cette couronne, chaque point m peut être atteint de deux manières. Il suffit de tracer le cercle centré en m et de rayon r. Il coupe le cercle de rayon R (formé par les positions possibles de l'extrémité de la première tige) en deux points.

2. Il n'est pas facile de préciser le plus grand domaine Ω possible. On se contentera du domaine délimité par le bord vert sur la figure 3.

3. On trouve sans problème particulier

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha + r\cos\beta \\ y = R\sin\alpha + r\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -R\sin\alpha\, d\alpha - r\sin\beta\, d\beta \\ dy = R\sin\alpha\, d\alpha + r\cos\beta\, d\beta \end{cases}$$
$$\Rightarrow dx\wedge dy = Rr\sin(\beta-\alpha)\, d\alpha\wedge d\beta$$

4. Le coefficient de $d\alpha$ dans ω est le produit scalaire

$$(\begin{pmatrix} -R\sin\alpha \\ R\cos\alpha \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix})$$

Celui de $d\beta$ est clairement 1 donc $\omega = d\beta + R\cos(\beta-\alpha)d\alpha$ et :

$$d\omega = R\sin(\beta-\alpha)d\alpha\wedge d\beta = dx\wedge dy$$

Par conséquent l'intégrale curviligne de ω le long du contour fermé est l'aire du domaine. Cette intégrale est aussi la distance parcourue par la roulette à cause de la définition même de la forme ω.

Rémy Nicolai Aplanimetre