

## Énoncé

L'objet de ce problème est la démonstration du théorème de l'hexagramme de Pascal (fig 3). Les parties I, II, IV, V sont indépendantes entre elles.

### Notations communes à tout le problème.

On désigne par  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le produit scalaire est noté  $(./.)$ , une base orthonormée  $\mathcal{B}_E = (i, j, k)$  est fixée.

Le plan affine  $\mathcal{P}$  dans  $E$  est défini par  $k + \text{Vect}(i, j)$  (fig. 1).

On désigne par  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices symétriques  $3 \times 3$ . En particulier, on note :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilisera (la démonstration n'est pas demandée) le fait que

$$\mathcal{B}_S = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$$

est une base de  $\mathcal{S}$ .

On définit une application  $s$  de la manière suivante :

$$s : \begin{cases} E \rightarrow \mathcal{S} \\ x \mapsto (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E} x)^t (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E} x) \end{cases}$$

On sera amené à considérer les déterminants  $\det_{\mathcal{B}_E}$  et  $\det_{\mathcal{B}_S}$ . On prendra bien garde aux espaces de départ :

$$\det_{\mathcal{B}_E} \text{ est défini dans } E^3.$$

$$\det_{\mathcal{B}_S} \text{ est défini dans } \mathcal{S}^6$$

Des fonctions  $\lambda$  et  $\mu$ , définies dans  $E^6$ , sont introduites dans les parties I et II et utilisées ensuite.

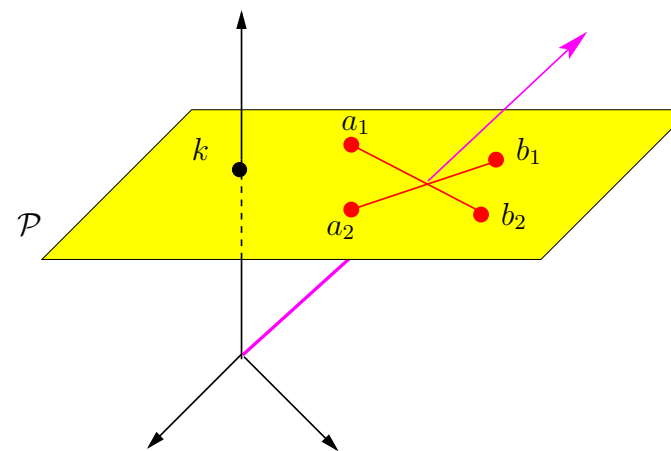


FIG. 1: Le plan affine  $\mathcal{P}$  dans  $E$

### Partie I. Condition d'alignement.

1. On se donne quatre vecteurs  $a_1, a_2, b_1, b_2$  dans  $\mathcal{P}$  (fig. 1). Montrer que

$$\mathcal{P} \cap \text{Vect}((a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1)) = (a_1 b_2) \cap (a_2 b_1)$$

où  $(a_1 b_2)$  et  $(a_2 b_1)$  désignent les droites dans le plan  $\mathcal{P}$ .

2. Soit  $c_1, c_2, c_3$  trois vecteurs n'appartenant pas à  $\text{Vect}(i, j)$ . Montrer que les points d'intersection de  $\text{Vect}(c_1), \text{Vect}(c_2), \text{Vect}(c_3)$  avec  $\mathcal{P}$  sont alignés si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}_E}(c_1, c_2, c_3) = 0$$

3. On définit une fonction  $\lambda$  de  $E^6$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in E^6 : \lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = \det_{\mathcal{B}_E}((a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1), (a_2 \wedge b_3) \wedge (a_3 \wedge b_2), (a_3 \wedge b_1) \wedge (a_1 \wedge b_3))$$

On se donne six vecteurs  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  dans  $\mathcal{P}$  (fig. 2). Lorsque les points d'intersection  $c_1, c_2, c_3$  existent, montrer qu'ils sont alignés si et seulement si

$$\lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = 0$$

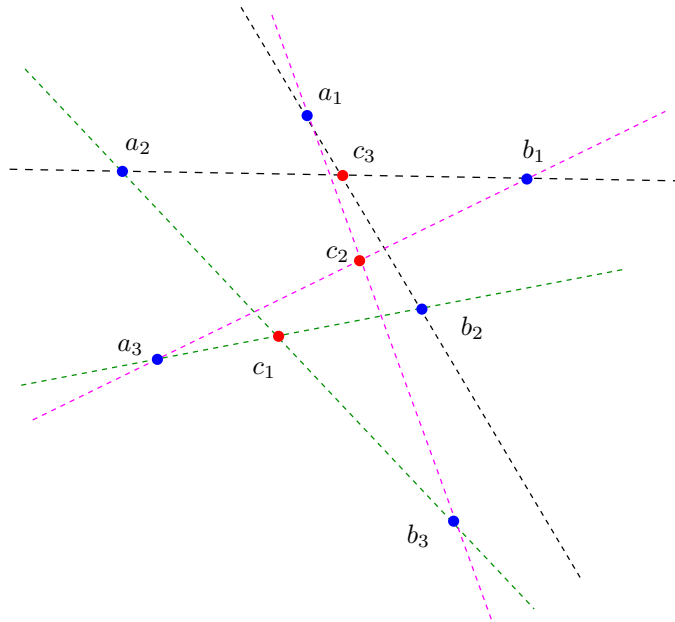


FIG. 2: Une configuration de 6 points dans  $\mathcal{P}$

**Partie II. Condition de « coconicité ».**

Une conique est une ligne de niveau d'une fonction du second degré. En particulier, des points  $M_i$  (avec  $i$  entre 1 et 6) du plan  $\mathcal{P}$  de coordonnées  $(x_i, y_i, 1)$  sont sur une même conique si et seulement si :

$$\exists(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6 \text{ non tous nuls et tels que } \forall i \in \{1, \dots, 6\} \\ Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cx_i + Dy_i^2 + Ey_i + F = 0$$

On définit une fonction  $\mu$  de  $E^6$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in E^6 : \\ \mu(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = \det_{\mathcal{B}_S}(s(u_1), s(u_2), s(u_3), s(u_4), s(u_5), s(u_6))$$

1. Soit  $u \in E$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la base  $\mathcal{B}_E$ . Calculer la matrice  $s(u)$ . En déduire les coordonnées de  $s(u)$  dans  $\mathcal{B}_S$ .

2. Montrer que les  $u_i$  (avec  $i$  entre 1 et 6) du plan  $\mathcal{P}$  de coordonnées  $(x_i, y_i, 1)$  sont sur une même conique si et seulement si :

$$\mu(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = 0$$

**Partie III. Démonstration par « force brute ».**

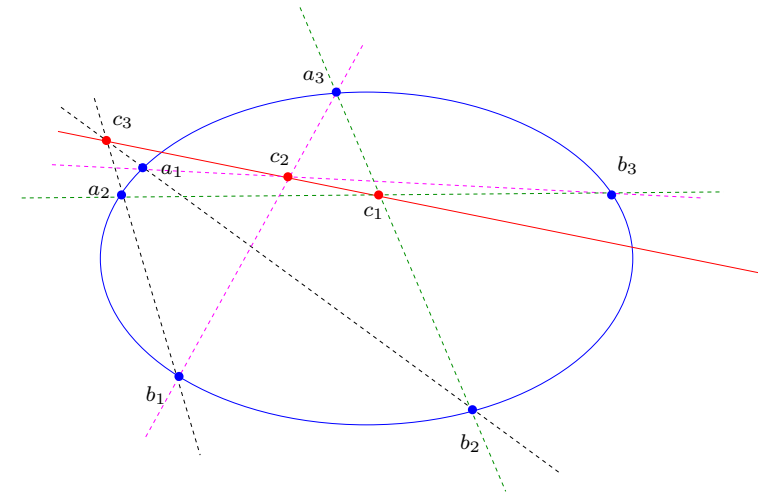


FIG. 3: Hexagramme de Pascal

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on établit :

$$\lambda = \mu$$

Formuler et démontrer un théorème relatif à l'hexagramme de Pascal (fig 3).

Dans les parties suivantes, on ramène la démonstration de cette égalité à des calculs accessibles à un humain.

**Partie IV. Étude d'un endomorphisme de  $\mathcal{S}$ .**

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on définit une application  $c_M$  dans  $\mathcal{S}$  par :

$$\forall S \in \mathcal{S} : c_M(S) = MS^tM$$

1. a. Montrer que  $c_M \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ .
- b. Pour toutes matrices  $M$  et  $M'$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , préciser  $c_{M'} \circ c_M$ .
- c. Montrer que  $c_M$  est bijectif si et seulement si  $M$  est inversible.

2. Dans cette question

$$M = P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Comment obtient-on  $A^t M$  à partir de  $A$ ? Comment obtient-on  $MA$  à partir de  $A$ ?
- b. Calculer  $c_M(S)$  avec

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- c. Former la matrice de  $c_M$  dans  $\mathcal{B}_S$ . En déduire  $\det c_{P_{1,2}}$ .  
On admet que l'on obtient un résultat analogue pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers distincts entre 1 et 3.

3. Dans cette question

$$M = A_{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Comment obtient-on  $A^t M$  à partir de  $A$ ? Comment obtient-on  $MA$  à partir de  $A$ ?
- b. Calculer  $c_M(S)$  avec

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- c. Former la matrice de  $c_M$  dans  $\mathcal{B}_S$ . En déduire  $\det c_{A_{1,2}(\lambda)}$ .  
On admet que l'on obtient un résultat analogue pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers distincts entre 1 et 3.

4. Dans cette question

$$M = D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Comment obtient-on  $A^t M$  à partir de  $A$ ? Comment obtient-on  $MA$  à partir de  $A$ ?
- b. Calculer  $c_M(S)$  avec

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- c. Former la matrice de  $c_M$  dans  $\mathcal{B}_S$ . En déduire  $\det c_{D_1(\lambda)}$ .  
On admet que l'on obtient un résultat analogue pour tout  $i$  entier entre 1 et 3.

5. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \det c_M = (\det M)^4$$

## Partie V. Adjoint et image d'un produit vectoriel.

1. Questions de cours.

- a. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$  une base orthonormée de  $E$ . Quel est le terme  $i, j$  de la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{U}$ ?
- b. Soit  $(a, b, c) \in E^3$ ,  $g \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{U}$  une base quelconque. Donner une autre expression pour :

$$\det_{\mathcal{U}}(g(a), g(b), g(c))$$

2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on définit l'adjoint de  $f$  (noté  ${}^t f$ ) par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E} {}^t f = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E} f)$$

- a. Montrer que pour toute base orthonormée  $\mathcal{U}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{U}} {}^t f = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{U}} f)$$

- b. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2 : (f(x)/y) = (x/{}^t f(y))$$

- c. Montrer que  ${}^t f$  est un automorphisme si et seulement si  $f$  est un automorphisme avec

$$({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1}) \text{ noté } {}^t f^{-1}$$

3. Soit  $f$  un automorphisme de  $E$ . Montrer que :

$$\forall (a, b) \in E^2 : f(a) \wedge f(b) = (\det f) {}^t f^{-1}(a \wedge b)$$

4. Soit  $f$  un automorphisme de  $E$  et  $A$  sa matrice dans une base orthonormée. Quelle est la matrice de  $(\det f) {}^t f^{-1}$  dans la même base orthonormée?

## Partie VI. Démonstration classique<sup>1</sup>.

1. En développant suivant la première colonne, vérifier l'égalité entre déterminants réels :

$$\begin{vmatrix} w_2 u_1 & u_3 u_2 & u_1 v_3 \\ v_2 w_1 & u_3 v_2 & v_1 v_3 \\ w_2 w_1 & w_3 u_2 & v_1 w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 & u_3 v_3 \\ v_1 w_1 & v_2 w_2 & v_3 w_3 \\ u_1 w_1 & u_2 w_2 & u_3 w_3 \end{vmatrix}$$

2. Montrer que, pour tout  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in E^6$  et tout  $f \in GL(E)$ ,

$$\lambda(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(b_1), f(b_2), f(b_3)) = (\det f)^4 \lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$$

3. Soit  $f \in GL(E)$  et  $M$  la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_E$ .

Montrer que, pour tout  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in E^6$ ,

$$\mu(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(b_1), f(b_2), f(b_3)) = (\det M)^4 \mu(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$$

4. Pour  $i$  entre 1 et 3, les coordonnées dans  $\mathcal{B}_E$  du vecteur  $b_i$  de  $E$  sont  $(u_i, v_i, w_i)$ .

- Exprimer  $\lambda(i, j, k, b_1, b_2, b_3)$  comme un déterminant  $3 \times 3$ .
- Exprimer  $\mu(i, j, k, b_1, b_2, b_3)$  comme un déterminant  $6 \times 6$  puis  $3 \times 3$ . Que peut-on en déduire ?

5. Soit  $a_1, \dots, a_6$  six vecteurs de  $E$  tels que  $(a_1, a_2, a_3)$  soit libre. Montrer que

$$\lambda(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \mu(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

6. Dans  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ , on définit  $\langle ./. \rangle$  par :

$$\forall (S, S') \in \mathcal{S}^2 : \langle S/S' \rangle = \text{tr}(SS')$$

- Montrer que  $\langle ./. \rangle$  est un produit scalaire de  $\mathcal{S}$ .
- Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2 : \langle s(x)/s(y) \rangle = (x/y)^2$$

- Montrer que  $\mathcal{B}_\mathcal{S}$  est orthogonale. Est-elle orthonormée ?
- Montrer que, pour tous vecteurs  $x_1, \dots, x_6$  de  $E$ ,

$$8(\mu(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6))^2 = \begin{vmatrix} (x_1/x_1)^2 & (x_1/x_2)^2 & \cdots & (x_1/x_6)^2 \\ (x_2/x_1)^2 & (x_2/x_2)^2 & \cdots & (x_2/x_6)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_6/x_1)^2 & (x_6/x_2)^2 & \cdots & (x_6/x_6)^2 \end{vmatrix}$$

<sup>1</sup>en géométrie projective, les démonstrations consistent souvent à « expédier des objets à l'infini »

## Corrigé

### Partie I. Condition d'alignement.

1. Notons *truc* le produit des quatre vecteurs. Rappelons la formule du double produit vectoriel :

$$(u \wedge v) \wedge w = (u/w)v - (v/w)u$$

On peut l'utiliser de deux manières pour *truc* en faisant jouer à  $a_2 \wedge b_1$  ou à  $a_1 \wedge b_2$  le rôle de  $w$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{truc} = (a_1 \wedge b_2) \wedge w \in \text{Vect}(a_1, b_2) \\ \text{truc} = (b_1 \wedge a_2) \wedge w \in \text{Vect}(a_2, b_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{truc} \in \text{Vect}(a_1, b_2) \cap \text{Vect}(a_2, b_1)$$

Les droites  $(a_1 b_2)$  et  $(a_2 b_1)$  sont respectivement les intersections de  $\mathcal{P}$  avec les plans  $\text{Vect}(a_1, b_2)$  et  $\text{Vect}(a_2, b_1)$ . On en tire la relation demandée.

2. Les trois points d'intersection sont alignés si et seulement si ils sont dans une même droite. cela se produit si et seulement si les trois vecteurs sont dans un même plan ce qui se traduit par la nullité du déterminant.
3. Les points  $c_i$  de la figure 2 sont d'après la question 1 les points d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec les droites vectorielles engendrées par les triples produits vectoriels. D'après la question 2, ces points sont alignés si et seulement si leur déterminant est nul.

### Partie II. Condition de « coconicité ».

1. Par définition :

$$s(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de  $s(u)$  dans  $\mathcal{B}_\mathcal{S}$  se lisent directement :

$$(x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2)$$

2. Les points  $u_i$  sont sur une même conique si et seulement si il existe des réels  $A, \dots, F$

non tous nuls tels que

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cx_1 + Dy_1^2 + Ey_1 + F = 0 \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cx_2 + Dy_2^2 + Ey_2 + F = 0 \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cx_3 + Dy_3^2 + Ey_3 + F = 0 \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cx_4 + Dy_4^2 + Ey_4 + F = 0 \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cx_5 + Dy_5^2 + Ey_5 + F = 0 \\ Ax_6^2 + Bx_6y_6 + Cx_6 + Dy_6^2 + Ey_6 + F = 0 \end{cases}$$

Cela se produit si et seulement si le système linéaire d'équations aux inconnues  $(A, B, C, D, E, F)$  admet une solution autre que  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . C'est à dire lorsque la matrice de ce système n'est pas inversible. Or cette matrice est la transposée de la matrice des coordonnées de la famille  $(s(u_1), \dots, s(u_6))$ . La condition de non inversibilité est donc la nullité du déterminant :

$$\mu(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = 0$$

### Partie III. Démonstration par « force brute ».

Le code suivant permet de réaliser en Maple le calcul des deux déterminants. Il utilise la bibliothèque `LinearAlgebra`.

```
> with(LinearAlgebra):
a1:=<x1,y1,z1>:
a2:=<x2,y2,z2>:
a3:=<x3,y3,z3>:
b1:=<u1,v1,w1>:
b2:=<u2,v2,w2>:
b3:=<u3,v3,w3>:

C3:=CrossProduct(CrossProduct(a1,b2),CrossProduct(a2,b1)):
C1:=CrossProduct(CrossProduct(a2,b3),CrossProduct(a3,b2)):
C2:=CrossProduct(CrossProduct(a3,b1),CrossProduct(a1,b3)):

#calcul du lambda
dd:=Determinant(<<C1|C2|C3>>):

lign:= V -><V[1]^2|V[1]*V[2]|V[1]*V[3]|V[2]^2|V[2]*V[3]|V[3]^2>:
```

```
#calcul du mu
DD:=Determinant(<lign(a1),lign(a2),lign(a3),lign(b1),lign(b2),lign(b3)>):
```

```
dd-DD;
```

Les expressions des déterminants sont trop importantes pour que leur affichage apporte quelque chose. La dernière instruction seulement affiche un résultat et celui ci est 0.

Une implémentation en Python (utilisant le module de calcul formel `sympy` est aussi proposée.

```
import sympy as smp
```

```
## déclaration des symboles
```

```
x1, y1, z1 = smp.symbols('x1 y1 z1')
```

```
x2, y2, z2 = smp.symbols('x2 y2 z2')
```

```
x3, y3, z3 = smp.symbols('x3 y3 z3')
```

```
u1, v1, w1 = smp.symbols('u1 v1 w1')
```

```
u2, v2, w2 = smp.symbols('u2 v2 w2')
```

```
u3, v3, w3 = smp.symbols('u3 v3 w3')
```

```
## initialisation
```

```
a1 = smp.Matrix([x1, y1, z1])
```

```
a2 = smp.Matrix([x2, y2, z2])
```

```
a3 = smp.Matrix([x3, y3, z3])
```

```
b1 = smp.Matrix([u1, v1, w1])
```

```
b2 = smp.Matrix([u2, v2, w2])
```

```
b3 = smp.Matrix([u3, v3, w3])
```

```
## produits vectoriels
```

```
X12 = a1.cross(b2) ; X13 = a1.cross(b3)
```

```
X21 = a2.cross(b1) ; X23 = a2.cross(b3)
```

```
X31 = a3.cross(b1) ; X32 = a3.cross(b2)
```

```
C1 = X23.cross(X32)
```

```
C2 = X31.cross(X13)
```

```
C3 = X12.cross(X21)
```

```

## calcul du lambda
C = C1.col_insert(1,C2)
C = C.col_insert(2,C3)
dlambda = C.det()

## calcul du mu
def li(L):
    return [L[0]**2, L[0]*L[1],L[0]*L[2],L[1]**2,L[1]*L[2], L[2]**2]

M = smp.Matrix([li(a1),li(a2),li(a3),li(b1),li(b2),li(b3)])
mu = M.det()

## vérification
print(dlambda - mu)

```

De l'égalité des deux déterminants, on déduit évidemment que la nullité de l'un est équivalente à la nullité de l'autre. Ceci démontre le théorème de l'hexagramme de Pascal.

Les trois points  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  de la configuration de la figure 2 sont alignés si et seulement si les six points donnés sont situés sur une même conique.

## Partie IV. Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{S}$ .

1. a. La fonction  $c_M$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{S}$ . En effet,

$$\forall S \in \mathcal{S} : {}^t(MS^tM) = {}^t({}^tM) {}^tS {}^tM = MS^tM$$

car  $S$  est symétrique. De plus  $c_M$  est linéaire à cause de la linéarité du produit matriciel.

- b. Soit  $M$  et  $M'$  deux matrices  $3 \times 3$ . Pour toute  $S$  symétrique :

$$c_{M'} \circ c_M(S) = c_{M'}(MS^tM) = M'MS^tM {}^tM' = (M'M)S^t(M'M)$$

On en déduit  $c_{M'} \circ c_M = c_{M'M}$ .

- c. Il est évident que  $c_I$  est l'identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On en déduit que, lorsque  $M$  est inversible,  $c_M$  est bijective de bijection réciproque  $c_{M^{-1}}$ .

Montrons maintenant la contraposée de la réciproque. Supposons  $M$  non inversible. Il existe une colonne  $X$  non nulle telle que  $MX$  est la colonne nulle. En répétant la colonne  $X$ , on peut former une matrice  $M'$  telle que  $MM'$  est la

matrice nulle. On en déduit que  $c_M \circ c_{M'}$  est l'application identiquement nulle de  $\mathcal{S}$  dans lui-même. Cette application n'est évidemment pas surjective ce qui montre que  $c_M$  n'est pas bijective. Ceci montre bien que  $c_M$  bijective entraîne  $M$  inversible.

2. a. On reconnaît une matrice d'opération élémentaire.  
 –  $A^tM$  est obtenue à partir de  $A$  en permutant les colonnes 1 et 2.  
 –  $MA$  est obtenue à partir de  $A$  en permutant les lignes 1 et 2.  
 b. La matrice  $c_M(S)$  est obtenue par les opérations élémentaires décrites en a. (on commence par les colonnes)

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & a & c \\ d & b & e \\ e & c & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & b & e \\ b & a & c \\ e & c & f \end{pmatrix} = c_M(S)$$

- c. Le calcul précédent permet d'écrire la matrice de  $c_M$  dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ . Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est obtenue à partir de  $I_6$  en permutant les colonnes 1 et 4 puis 3 et 5. Son déterminant est donc 1.

$$\det C_{P_{1,2}} = 1$$

3. a. On reconnaît une matrice d'opération élémentaire.  
 –  $A^tM$  est obtenue à partir de  $A$  en ajoutant  $\lambda$  fois la colonne 2 à la colonne 1.  
 –  $MA$  est obtenue à partir de  $A$  en ajoutant  $\lambda$  fois la ligne 2 à la ligne 1.  
 b. La matrice  $c_M(S)$  est obtenue par les opérations élémentaires décrites en a. (on commence par les colonnes)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a + \lambda b & b & c \\ b + \lambda d & d & e \\ c + \lambda e & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a + 2\lambda b + \lambda^2 d & b + \lambda d & c + \lambda e \\ b + \lambda d & d & e \\ c + \lambda e & e & f \end{pmatrix}$$

c. Le calcul précédent permet d'écrire la matrice de  $c_M$  dans  $\mathcal{B}_S$ . Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, son déterminant est donc 1.

$$\det C_{A_{1,2}(\lambda)} = 1$$

4. a. On reconnaît une matrice d'opération élémentaire.
- $A^t M$  est obtenue à partir de  $A$  en multipliant par  $\lambda$  la colonne 1.
  - $MA$  est obtenue à partir de  $A$  en multipliant par  $\lambda$  la ligne 1.
- b. La matrice  $c_M(S)$  est obtenue par les opérations élémentaires décrites en a. (on commence par les colonnes)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a & b & c \\ \lambda b & d & e \\ \lambda c & e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda b & d & e \\ \lambda c & e & f \end{pmatrix}$$

c. Le calcul précédent permet d'écrire la matrice de  $c_M$  dans  $\mathcal{B}_S$ . Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale avec  $\lambda^2$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda$  sur la diagonale, son déterminant est donc  $\lambda^4$ .

$$\det C_{D_1(\lambda)} = \lambda^4$$

5. Remarquons d'abord que la formule proposée par l'énoncé est valable pour les *matrices élémentaires* des questions précédentes.
- Soit  $M$  une matrice inversible fixée. En utilisant l'algorithme du pivot partiel, on peut

trouver des matrices  $M_1, \dots, M_s$  élémentaires de la forme  $P_{i,j}$  ou  $A_{i,j}(\lambda)$  avec  $j > i$  telles que

$$M_s \cdots M_1 M = U : \text{matrice triangulaire supérieure}$$

si on s'autorise maintenant les  $A_{i,j}(\lambda)$  avec  $i > j$  on peut trouver de nouvelles matrices élémentaires  $M_{s+1}, \dots, M_t$  permettant de « nettoyer » la partie supérieure de la matrice.

$$M_t \cdots M_1 M = D : \text{matrice diagonale}$$

Les termes de la diagonale sont non nuls, cette matrice diagonale est clairement un produit de trois matrices  $D_i(\lambda)$ . Les matrices élémentaires considérées sont inversibles avec des inverses de même forme :

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j} \quad A_{i,j}(\lambda)^{-1} = A_{i,j}(-\lambda) \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

La matrice  $M$  est donc le produit de matrices élémentaires  $P_1, \dots, P_q$ .

$$\begin{aligned} M = P_1 \cdots P_q &\Rightarrow c_M = c_{P_1} \circ \cdots \circ c_{P_q} \\ &\Rightarrow \det c_M = \det c_{P_1} \cdots \det c_{P_q} = (\det P_1)^4 \cdots (\det P_q)^4 \\ &= (\det(P_1 \cdots P_q))^4 = (\det M)^4 \end{aligned}$$

## Partie V. Adjoint et image d'un produit vectoriel.

1. Question de cours

- a. Le terme  $i, j$  de la matrice de  $f$  dans une base orthonormée  $(u_1, u_2, u_3)$  est  $(u_i/f(u_j))$ .
- b. Par définition du déterminant d'une application linéaire :

$$\forall (a, b, c) \in E^3 : \det_{\mathcal{U}}(g(a), g(b), g(c)) = \det g \det_{\mathcal{U}}(a, b, c)$$

2. a. Soit  $\mathcal{U}$  une base orthonormée quelconque. La matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}_E$  dans  $\mathcal{U}$  est alors orthogonale. Écrivons les formules de changement de base :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{U}}({}^t f) &= P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}({}^t f) P = {}^t P^t \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P \quad (\text{car } P \text{ est orthogonale}) \\ &= {}^t ({}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P) = {}^t (P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P) \quad (\text{car } P \text{ est orthogonale}) \\ &= {}^t (\text{Mat}_{\mathcal{U}}(f)) \end{aligned}$$

- b. La relation que l'énoncé demande de vérifier est la définition même de  ${}^t f$  lorsque  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs de la base  $\mathcal{B}_E$ . On étend cette formule à tous les vecteurs par linéarité.
- c. Pour une matrice carrée, comme le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée, l'inversibilité d'une matrice est équivalente à celle de sa transposée. De plus :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \Rightarrow {}^t A^{-1} {}^t A = {}^t A {}^t A^{-1} = I$$

Ce qui montre que l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.

- 3. On utilise la définition du produit vectoriel avec le déterminant dans une base orthonormée quelconque (produit mixte). Pour tout vecteur  $c \in E$  :

$$\begin{aligned} (f(a) \wedge f(b)/c) &= \det(f(a), f(b), c) = \det(f(a), f(b), f(f^{-1}(c))) \\ &= (\det f) \det(a, b, f^{-1}(c)) = (\det f)(a \wedge b/f^{-1}(c)) = (\det f)({}^t f^{-1}(a) \wedge b/c) \end{aligned}$$

Comme ceci est valable pour *tous* les  $c$ , on obtient bien :

$$f(a) \wedge f(b) = (\det f) {}^t f^{-1}$$

- 4. Dans le cours figure une expression de l'inverse d'une matrice à l'aide de la transposée de la matrice des cofacteurs. On en déduit que, si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base orthonormée, la matrice de  $(\det f) {}^t f^{-1}$  est la matrice des cofacteurs de  $A$ .

### Partie VI. Démonstration classique.

- 1. Comme l'énoncé nous y invite, on développe chaque déterminant suivant la première colonne.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} w_2 u_1 & u_3 u_2 & u_1 v_3 \\ v_2 w_1 & u_3 v_2 & v_1 v_3 \\ w_2 w_1 & w_3 u_2 & v_1 w_3 \end{vmatrix} &= w_2 u_1 u_3 v_2 v_1 w_3 - w_2 u_1 w_3 u_2 v_1 v_3 - v_2 w_1 u_3 u_2 v_1 w_3 \\ &\quad + v_2 w_1 w_3 u_2 u_1 v_3 + w_2 w_1 u_3 u_2 v_1 v_3 - w_2 w_1 u_3 v_2 u_1 v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 & u_3 v_3 \\ v_1 w_1 & v_2 w_2 & v_3 w_3 \\ u_1 w_1 & u_2 w_2 & u_3 w_3 \end{vmatrix} &= u_1 v_1 v_2 w_2 u_3 w_3 - u_1 v_1 u_2 w_2 v_3 w_3 - v_1 w_1 u_2 v_2 u_3 w_3 \\ &\quad + v_1 w_1 u_2 w_2 u_3 v_3 + u_1 w_1 u_2 v_2 v_3 w_3 - u_1 w_1 v_2 w_2 u_3 v_3 \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité.

- 2. Le  $\lambda$  des  $f(u_i)$  est un déterminant de trois vecteurs. Examinons le premier :

$$truc_1 = (f(a_1) \wedge f(b_2)) \wedge (f(a_2) \wedge f(b_1))$$

Notons  $g = {}^t f^{-1}$  et appliquons plusieurs fois la question V.3 et la linéarité :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(a_1) \wedge f(b_2) &= (\det f) g(a_1 \wedge b_2) \\ f(a_2) \wedge f(b_1) &= (\det f) g(a_2 \wedge b_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow truc_1 = (\det f)^2 g(a_1 \wedge b_2) \wedge g(a_2 \wedge b_1) \\ &= (\det f)^2 (\det g) {}^t g^{-1} ((a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1)) = (\det f) f \left( \underbrace{(a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1)}_{=c_1} \right) \\ &\quad \text{car } \det g = \frac{1}{\det f} \text{ et } {}^t g^{-1} = f \end{aligned}$$

On obtient des formules analogues pour les autres vecteurs. Par trilinearité et définition du déterminant d'un endomorphisme, il vient enfin :

$$\begin{aligned} \lambda(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(b_1), f(b_2), f(b_3)) &= (\det f)^3 \det_{\mathcal{B}_E}(f(c_1), f(c_2), f(c_3)) \\ &= (\det f)^4 \det_{\mathcal{B}_E}(c_1, c_2, c_3) = (\det f)^4 \lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

- 3. Soit  $f$  un automorphisme de matrice  $M$  dans  $\mathcal{B}_E$ . Soit  $u$  un vecteur de  $E$  dont la matrice colonne des coordonnées est notée  $X$ . Examinons  $s(f(u))$ .

$$s(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f(u)) {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f(u)) = (AX) {}^t (AX) = AX {}^t X {}^t A = c_A(s(u))$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(b_1), f(b_2), f(b_3)) &= \det_{\mathcal{B}_S}(c_A(s(a_1)), c_A(s(a_2)), c_A(s(a_3)), c_A(s(b_1)), c_A(s(b_2)), c_A(s(b_3))) \\ &= \det c_A \det_{\mathcal{B}_S}(s(a_1), s(a_2), s(a_3), s(b_1), s(b_2), s(b_3)) \\ &= (\det A)^4 \lambda(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

- 4. a. On calcule les coordonnées des produits vectoriels dans la base  $\mathcal{B} = (i, j, k)$ . On



trouve :

$$\left. \begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(i \wedge b_2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -w_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(j \wedge b_1) &= \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ -u_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}((i \wedge b_2) \wedge (j \wedge b_1)) = \begin{pmatrix} w_2 u_1 \\ v_2 w_1 \\ w_2 w_1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(j \wedge b_3) &= \begin{pmatrix} w_3 \\ 0 \\ -u_3 \end{pmatrix} \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(k \wedge b_2) &= \begin{pmatrix} -v_2 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}((j \wedge b_3) \wedge (k \wedge b_2)) = \begin{pmatrix} u_3 u_2 \\ u_3 v_2 \\ w_3 u_2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(k \wedge b_1) &= \begin{pmatrix} -v_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(i \wedge b_3) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -w_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}((k \wedge b_1) \wedge (i \wedge b_3)) = \begin{pmatrix} u_1 v_3 \\ v_1 v_3 \\ v_1 w_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\lambda(i, j, k, b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} w_2 u_1 & u_3 u_2 & u_1 v_3 \\ v_2 w_1 & u_3 v_2 & v_1 v_3 \\ w_2 w_1 & w_3 u_2 & v_1 w_3 \end{vmatrix}$$

b. Par définition de  $\mu$  :

$$\mu(i, j, k, b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 v_1 & u_2 v_2 & u_3 v_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 w_1 & u_2 w_2 & u_3 w_3 \\ 0 & 1 & 0 & v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 w_1 & v_2 w_2 & v_3 w_3 \\ 0 & 0 & 1 & w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ 0 & 1 & 0 & v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 v_1 & u_2 v_2 & u_3 v_3 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 w_1 & v_2 w_2 & v_3 w_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 w_1 & u_2 w_2 & u_3 w_3 \end{vmatrix}$$

en permutant les lignes 2 et 4 puis 3 et 6. On en déduit :

$$\mu(i, j, k, b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 & u_3 v_3 \\ v_1 w_1 & v_2 w_2 & v_3 w_3 \\ u_1 w_1 & u_2 w_2 & u_3 w_3 \end{vmatrix}$$

On en déduit, d'après la question 1. que ces deux déterminants sont égaux.

5. Considérons six vecteurs  $a_1, \dots, a_6$  dont les trois premiers forment une famille libre. Il existe un unique automorphisme  $f$  qui envoie respectivement  $a_1, a_2, a_3$  sur  $i, j, k$ . Notons  $b_1, b_2, b_3$  les images par  $f$  des vecteurs suivants et  $M$  la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_E$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \lambda(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) &= (\det f)^{-4} \lambda(i, j, k, b_1, b_2, b_3) \\ &= (\det M)^{-4} \mu(i, j, k, b_1, b_2, b_3) = \mu(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \end{aligned}$$

6. a. La bilinéarité est évidente, la symétrie vient du caractère symétrique des matrices et de l'invariance de la trace par transposition. La positivité vient de ce que  $\langle S/S \rangle$  est la somme des carrés des termes de  $S$ .  
b. Notons respectivement  $X$  et  $Y$  les colonnes de coordonnées de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{B}_E$ . Par définition :

$$\langle s(x)/s(y) \rangle = \text{tr} \left( X \underbrace{{}^t X Y}_{\in \mathbb{R}} {}^t Y \right) = ({}^t X Y) \text{tr}(X {}^t Y) = ({}^t X Y)^2 = (x/y)^2$$

après examen de la matrice  $X {}^t Y$ .

- c. En calculant les  $\langle S_i/S_j \rangle$ , on vérifie facilement que la base  $\mathcal{B}_S$  est orthogonale. Elle n'est pas orthonormée car  $S_1, S_4$  et  $S_6$  sont de norme 1 mais les autres sont de norme 2.  
d. Considérons six vecteurs  $a_1, \dots, a_6$  de  $E$  et notons  $P$  la matrice dans  $\mathcal{B}_S$  des images de ces vecteurs par  $S$ . D'après b. :

$$\langle s(a_i)/s(a_j) \rangle = (a_i/a_j)^2$$

mais c'est aussi le terme  $i, j$  de la matrice

$${}^t P D P$$

où  $D$  est la matrice du produit scalaire  $\langle ./. \rangle$  dans  $\mathcal{B}_S$ . Cette matrice est diagonale avec trois 1 et trois 2. L'égalité des déterminants obtenue à partir de cette égalité matricielle conduit à la relation demandée.