Énoncé

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites *croissantes* de nombres *entiers supérieurs ou égaux* à 2. À chaque suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de $\mathcal{T}$ on associe la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$s_1 = \frac{1}{q_1}, \quad s_2 = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2}, \quad \cdots \quad , \quad s_n = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

1. a. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. Montrer que $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite est un élément de $\left]\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}\right]$.

   b. Montrer que

   $$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq p,\ s_n \leq s_{p-1} + \frac{1}{q_1 \cdots q_{p-1}(q_p - 1)}$$

   c. Démontrer que, pour toute suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de $\mathcal{T}$ la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite x est un élément de $]0,1]$. On dira, dans la suite du problème, que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un *développement de Engel* de x.

2. a. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite stationnaire de $\mathcal{T}$. Montrer que x est un nombre rationnel.

   b. Montrer

   $$q_1 = 1 + \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ q_{k+1} - 1 = \left\lfloor \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k (x - s_k)} \right\rfloor$$

3. a. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites dans $\mathcal{T}$. Les suites qui leurs sont respectivement associées sont notées $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limites x et x'. On suppose :

   $$\exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tq } q_p < q'_p \quad \text{et} \quad \forall n \in \{1, \ldots, p-1\},\ q_n = q'_n$$

   Montrer que $x' < x$.

   b. Montrer que l'application de $\mathcal{T}$ dans $]0,1]$ qui, à chaque suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, associe la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est injective.

4. Fonction de Briggs.
   On définit une fonction β dans $[0,1[$ par :

   $$\forall x \in]0,1[: \beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ qx - 1 \text{ avec } q = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   a. Montrer que $0 < \beta(x) \leq x$ pour $x \in]0,1[$.

   b. En un point x de $]0,1[$, étudier les limites à gauche et à droite (strictement ou largement). Préciser les points où β est continue, les points où $\beta(x) = x$, quelle est la limite strictement à droite de ces points ?

   c. La fonction β est-elle continue en 0 ?

   d. Tracer le graphe de β.

5. Algorithme de Briggs
   Pour tout x de $]0,1[$ et tout entier n, on pose $x_n = \underbrace{\beta \circ \cdots \circ \beta}_{n \text{ fois}}(x) = \beta^n(x)$.

   a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans tout le reste du problème, cette limite est notée $r(x)$.

   b. Soit $x \in]0,1[$ tel que $r(x) > 0$, montrer qu'il existe q et N entiers tels que :

   $$\forall n \geq N :\ x_n = \frac{1}{q}$$

6. a. Montrer que tout $x \in]0,1[$ admet un unique développement de Engel.

   b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 < a < b$. Montrer que

   $$\beta(\frac{a}{b}) = \frac{a - r}{b}$$

   où r est le reste de la division euclidienne de b par a.

   c. Montrer que le développement de Engel d'un nombre est stationnaire si et seulement si ce nombre est rationnel.

7. Déterminer la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ associée soit

   $$x = \frac{1}{2} \quad (1) \qquad\qquad x = \frac{3}{4} \quad (2)$$

8. Soit x l'approximation décimale de $\frac{1}{\pi}$ fournie par votre calculatrice. Calculer, en justifiant, les premiers entiers $q_1, q_2, \cdots, q_n$ jusqu'à ce que

   $$\frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n} < 10^{-10}$$

Rémy Nicolai Aengel

Corrigé

1. a. La suite proposée est formée par la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{\lambda} \in]0,1[$, elle converge vers $\frac{1}{\lambda-1}$ car

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k} = \frac{1}{\lambda} \frac{1-\frac{1}{\lambda^n}}{1-\frac{1}{\lambda}} \longrightarrow \frac{1}{\lambda(1-\frac{1}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda - 1}$$

b. Comme $q_n \geq q_p$ pour tout $n \geq p$,

$$s_n = s_{p-1} + \frac{1}{q_1 \cdots q_p} + \cdots + \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \leq s_{p-1} + \frac{1}{q_1 \cdots q_p}\left(1 + \frac{1}{q_p} + \cdots\right)$$
$$\leq s_{p-1} + \frac{1}{q_1 \cdots q_p} \frac{1}{1-\frac{1}{q_p}} = s_{p-1} + \frac{1}{q_1 \cdots q_{p-1}(q_p - 1)}$$

c. La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement croissante, donc $s_n \geq \frac{1}{q_1}$. De plus, d'après la question précédente :

$$\forall n \geq 2,\ s_n \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1(q_2-1)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ car } q_1 \geq 2 \text{ et } q_2 \geq 2$$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée, elle converge vers un réel x. En passant à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient $\frac{1}{q_1} \leq x \leq 1$ d'où $x \in]0,1]$.

2. a. Lorsque $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire, il existe deux entiers k et q tels que $q_n = q$ pour tous les $n \geq k+1$. On en déduit alors

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{1}{q_1 \cdots q_k} + \frac{1}{q_1 \cdots q_k q} \frac{1}{1-\frac{1}{q}} \in \mathbb{Q}$$

b. La croissance des q_n entraîne $s_n \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \cdots + \frac{1}{q_1^n}$. Par passage à la limite dans une inégalité, il vient $x \leq \frac{1}{q_1 - 1}$ puis $q_1 - 1 \leq \frac{1}{x}$.
D'autre part, $\frac{1}{q_1} < s_2 \leq x$, donc $\frac{1}{q_1} < x$ puis $\frac{1}{x} < q_1$. Cela entraîne $q_1 - 1 \leq \frac{1}{x} < q_1$ ce qui prouve bien que $q_1 = \lfloor x \rfloor + 1$.
Plus généralement, pour k fixé et $n \geq k$:

$$s_n - s_k = \frac{1}{q_1 \cdots q_k}\left(\frac{1}{q_{k+1}} + \frac{1}{q_{k+1}q_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{q_{k+1}\cdots q_n}\right)$$

$$q_1 \cdots q_k (s_n - s_k) = \frac{1}{q_{k+1}} + \frac{1}{q_{k+1}q_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{q_{k+1}\cdots q_n}$$

Posons

$$q_1' = q_{k+1},\ q_2' = q_{k+2},\ \ldots$$

La suite qui figure à droite de l'égalité précédente est de même nature que les suites s_n. Notons y sa limite, on a alors en passant à la limite,

$$q_1 \cdots q_k (x - s_k) = y \quad \text{et} \quad \lfloor \frac{1}{y} \rfloor = q_1' - 1 = q_{k+1} - 1$$

3. a. D'après les hypothèses $s_{p-1} = s'_{p-1}$, notons s ce nombre et $\lambda = q_1 \cdots q_{p-1}$. D'après la question 2.b. :

$$\begin{cases} q_p - 1 = \lfloor \frac{1}{\lambda(x-s)} \rfloor \\ q_p' - 1 = \lfloor \frac{1}{\lambda(x'-s)} \rfloor \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_p = \lfloor \frac{1}{\lambda(x-s)} \rfloor + 1 > \frac{1}{\lambda(x-s)} \\ q_p' = \lfloor \frac{1}{\lambda(x'-s)} \rfloor + 1 \leq \frac{1}{\lambda(x'-s)} + 1 \end{cases}$$

Comme q_p et q_p' sont des entiers tels que $q_p < q_p'$ on a aussi $q_p + 1 \leq q_p'$ d'où $\frac{1}{\lambda(x-s)} < \frac{1}{\lambda(x'-s)}$ puis $x' < x$.

b. Il est clair que si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites *distinctes* dans $\mathcal{T}$, elles vérifieront (en les permutant au besoin) les hypothèses du a. On en déduit l'injectivité de l'application considérée.
On peut définir sur $\mathcal{T}$ une relation d'ordre lexicographique, cette application devient alors strictement croissante. Si x est un réel donné, la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x est entièrement déterminée par les formules de la question 2.b. On l'appelle le *développement de Engel* de x.

4. Fonction de Briggs

a. Écrivons l'encadrement définissant la partie entière de $\frac{1}{x}$.

$$\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x} < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1 \Leftrightarrow q - 1 \leq \frac{1}{x} < q \Leftrightarrow qx - x \leq 1 < qx$$
$$\Leftrightarrow qx - 1 \leq x \text{ et } 0 < qx - 1 \Leftrightarrow 0 < \beta(x) \leq x$$

b. Sur un intervalle ouvert entre deux inverses d'entiers consécutifs, la fonction β est affine. Elle est donc continue sur tous ces intervalles ouverts. En revanche, elle est discontinue en chaque point $x = \frac{1}{n}$ avec n naturel non nul. Il est facile de voir que, en ce point, sa limite à gauche (large) est $1 - x$ alors que sa limite à droite (stricte) est 0. Ce comportement apparait sur le graphe de la figure 1.

Rémy Nicolai Aengel

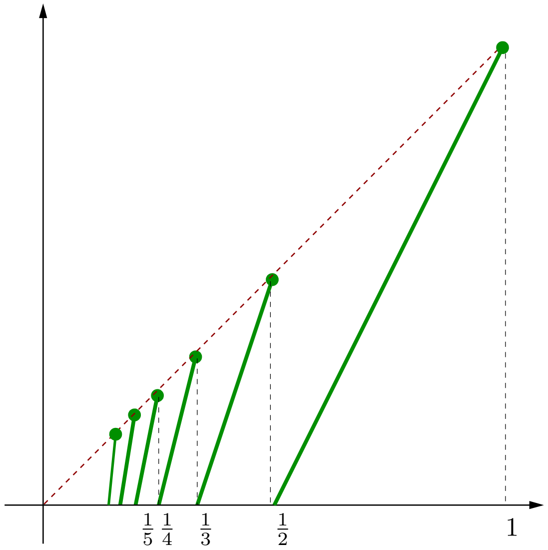

FIG. 1: Graphe de la fonction de Briggs

c. La fonction β est continue en 0. En effet, à cause des inégalités du a. et du théorème d'encadrement, elle converge vers 0 en 0.

d. Le graphe de la fonction de Briggs est tracé dans la figure 1.

5. Algorithme de Briggs

a. L'encadrement de 4.a. montre que la suite est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers un nombre $r(x)$ positif ou nul.

b. Si la limite $r(x)$ n'est ni 0 ni un inverse d'entier, elle est placé dans un intervalle ouvert dans lequel la fonction β est continue. On doit donc avoir $\beta(r(x)) = r(x)$ par passage à la limite. Or en un y qui n'est ni 0 ni un inverse d'entier on a $\beta(y) < y$. Lorsque $r(x)$ est non nul, il doit donc être un inverse d'entier c'est à dire qu'il existe un entier q tel que $r(x) = \frac{1}{q}$.
Il reste à montrer que la suite est *stationnaire* de valeur $\frac{1}{q}$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers $\frac{1}{q}$, il existe un certain N tel que

$$\frac{1}{q} \leq x_N < \frac{1}{q-1}$$

Si x_N était strictement plus grand que $\frac{1}{q}$, on voit bien sur le graphe que le terme suivant serait strictement plus petit ce qui est impossible. On doit donc avoir $x_N = \frac{1}{q}$ et la suite ne varie plus.

6. a. L'unicité d'un développement de Engel a été démontré dans la question 4. Le problème ici est de montrer que la suite des q_n donnés par les formules de la question 2.b. est croissante. Considérons un $x \in]0,1[$ et la suite des x_n en introduisant une notation q_n (on convient que $x_0 = x$)

$$q_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1, x_1 = q_1 x - 1 \qquad x = \frac{1}{q_1} + \frac{x_1}{q_1}$$

$$q_2 = \lfloor \frac{1}{x_1} \rfloor + 1, x_2 = q_2 x_1 - 1 \qquad x_1 = \frac{1}{q_2} + \frac{x_2}{q_2} x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{x_1}{q_1 q_2}$$

$$\vdots$$

$$q_n = \lfloor \frac{1}{x_{n-1}} \rfloor + 1, x_n = q_n x_{n-1} - 1 \quad x_{n-1} = \frac{1}{q_n} + \frac{x_n}{q_n} x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{x_n}{q_1 \cdots q_n}$$

On en tire

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{x_n}{q_1 \cdots q_n}$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, le x de départ est bien la limite d'une suite de Engel. La suite des q_n est croissante car elle est formée avec la partie entière supérieur des inverses de x_n. Les x_n décroissent, leurs inverses et leurs parties entières croissent.

b. Si r est le reste de la division de b par a, notons p le quotient

$$b = pa + r \text{ avec } r \in [\![0, a-1]\!] \Rightarrow \frac{b}{a} = p + \underbrace{\frac{r}{a}}_{\in[0,1[} \Rightarrow p = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$$

$$\Rightarrow \beta(\frac{a}{b}) = (p+1)x - 1 = \left(\frac{b-r}{a} + 1 \right) \frac{a}{b} - 1 = \frac{b - r + a - b}{b} = \frac{a-r}{b}$$

c. À cause de la question 2.a., on doit seulement montrer que le développement de Engel d'un nombre rationnel est stationnaire. D'après la question précédente, $\beta(\frac{a}{b})$ est rationnel avec le même dénominateur mais un numérateur inférieur ou égal. Il ne peut décroitre indéfiniment, on tombe forcément sur un numérateur qui divise le dénominateur et la suite des x_n est alors stationnaire.

Rémy Nicolai Aengel

7. Pour $x = \frac{1}{2}$: $q_1 = 3$, $x - s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, $q_2 = 1 + \lfloor \frac{1}{3(x-s_1)} \rfloor = 3$. On devine alors que tous les q_i seront égaux à 3 et en effet :
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \to \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$
Pour $x = \frac{3}{4}$: $q_1 = 2$, $x - s_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $q_1(x - s_1) = \frac{1}{2}$, $q_2 = 3$. Tous les q_i suivant seront égaux à 3 car
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3^n} \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

8. Soit $x = 0.3183098861$, les formules de la question 2.b. permettent de former le tableau suivant

i	q_i	s_i	$x - s_i$	$q_1 q_2 \cdots q_i$
1	4	0.25	0.0683098861	4
2	4	0.3125	0.0058098861	16
3	11	0.3181818182	0.0001280679	176
4	45	0.3183080808	0.0000018053	7920
5	70	0.3183098846	0.0000000015	554400
6	1203	0.3183098861		666943200

Rémy Nicolai Aengel